UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
Licenciatura em Matemática
UNIOESTE - *Campus* de Cascavel

ADA RAMOS ABREU
LETICIA TOIGO
RENAN DOUGLAS PAGLARINI DAVELA
VINICIUS VOZNIEK

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO II
PROMAT

CASCAVEL
2022

ADA RAMOS ABREU
LETICIA TOIGO
RENAN DOUGLAS PAGLARINI DAVELA
VINICIUS VOZNIEK

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO II
PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial da disciplina para aprovação.

Orientador: Profª. FELIPE LEANDRO DA SILVA COSTA
Orientador: Profª. AMARILDO VICENTE

CASCAVEL
2022

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho é um relatório das ações desenvolvidas na disciplina de Metodologia e Prática de Matemática - Estágio Supervisionado II, ofertada no quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE). Nele estão presentes os planos de aula e os relatórios de cada encontro, bem como as descrições da metodologia utilizada em cada atividade de ensino e das vivências durante o período de desenvolvimento do projeto.

O conteúdo trabalhado com os alunos inscritos no projeto PROMAT, foi dividido em 20 encontros. Nos primeiros 10 encontros os alunos do curso de Licenciatura em Matemática que estão cursando a disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática - Estágio Supervisionado I, trabalharam com turmas de, em princípio, 30 alunos. Após estes 10 encontros, tomamos a turma e trabalhamos com os mesmos, e alguns novos alunos, outros conteúdos em mais 10 encontros, divididos em 4 temas centrais, módulos. Trabalhamos Trigonometria no primeiro módulo, Geometria Analítica no segundo, Análise Combinatória no terceiro e encerramos com Tratamento de Informação. Destes módulos, tivemos 3 aulas assíncronas, gravadas em momento oportuno e disponibilizadas aos alunos em hospedagem no Youtube, com link encaminhado.

Os planos de aula e a metodologia utilizada pelo grupo foi pensada para que o PROMAT desse enfoque ao Vestibular da UNIOESTE e aos demais vestibulares e claro em relação ao ENEM. Desta forma, grande parte dos exercícios propostos foram retirados de provas destes vestibulares e do ENEM.

Sobre a elaboração das atividades a serem realizadas durante as aulas, planos de aulas, lista de exercícios e atividades lúdicas, tínhamos a preocupação de serem realizadas por todo o grupo, porém, algumas vezes isso não foi possível. As aulas da disciplina foram de grande importância, pois, eram oportunidades de compartilharmos ideias, sobre como abordaríamos o conteúdo com os alunos.

Em nossas aulas abordamos as tendências de Resolução de problemas e de Investigação Matemática, pois faz-se necessário contemplar ao aluno conceitos, definições e sugestões que propiciem melhor compreensão e apropriação dos conteúdos, interligando a Matemática com as vivências do dia a dia.

Além disso, em nossa prática pedagógica utilizamos de algumas ferramentas tecnológicas para materialização e elaboração, com objetivo de tornar as aulas mais dinâmicas e prazerosas, propiciando melhor apropriação dos conceitos por parte dos alunos.

A utilização desses recursos tecnológicos, durante as aulas, foi um instrumento valioso, pois, viabilizou que definições e propriedades fossem projetadas durante as aulas e, posteriormente enviadas aos alunos, além de claro, ser a base central.

Isso nos auxiliou quanto à utilização do tempo, poupando-o em diversas vezes, sem a necessidade de que ocupássemos parte da aula escrevendo. O software Geogebra foi de fundamental importância para a aplicação de muitos dos conteúdos, principalmente acerca de geometria e gráficos de funções, consequentemente, e o utilizamos diversas vezes durante as aulas.

2. PROMAT

O projeto PROMAT – Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática é executado na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, no Campus de Cascavel. São ofertados conteúdos de Matemática da Educação Básica exigidos nos concursos vestibulares da Unioeste, no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e em outros processos seletivos, na forma de "Curso Preparatório de Matemática", objetivando a apropriação de determinados conteúdos, conceitos e estruturas Matemáticas.

As aulas são ministradas por alunos estagiários do Curso de Licenciatura em Matemática, sob a supervisão e orientação dos professores do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática. As aulas ocorreram aos sábados de manhã, totalizando, neste momento em especial, 20 encontros de três horas aulas e meia. Foram atendidos alunos de Ensino Médio da rede pública de ensino oriundos da cidade de Cascavel e região, egressos do Ensino Médio, também alunos ingressantes no curso de Matemática e de outros cursos que fizeram inscrições no projeto.

No "primeiro semestre" do PROMAT, trabalhamos conteúdos de Matemática do Ensino Médio, enfocando sempre problemas dos vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), já que o objetivo era preparar os alunos para essas avaliações, sanar suas dúvidas e despertar o gosto pela Matemática, rompendo aquela imagem que a mesma é chata e sem utilidade. Para cumprir com esses objetivos foram produzidas aulas, materiais e atividades dinâmicas.

No "segundo semestre", foram trabalhados outros ademais conteúdos do Ensino Médio mais focados na resolução de exercícios voltados à Trigonometria e Geometria Analítica. Da mesma forma, para cumprir com esses objetivos foram produzidas aulas, materiais e atividades dinâmicas.

O projeto é de suma importância para todos os participantes, tanto para os alunos que visam ampliar seus conhecimentos e em decorrência disso, suas chances de entrar em cursos de Ensino Superior, quanto para os estagiários que visam ampliar suas experiências e necessitam da prática para se prepararem e promoverem uma educação de qualidade.

2.1 Opção Teórica e Metodológica

Para as tomadas em específico do conteúdo, utilizamos a Metodologia de Resolução de Problemas, atrelada à Investigação Matemática. Buscamos, junto aos alunos, desvendar de forma de definição, alguns conteúdos base as resoluções de exercícios impostas e a forma como, ENEM e demais vestibulares, cobravam em certas questões.

O uso prático das tecnologias disponíveis viabilizou muitas instrumentações que gostaríamos de apresentar, como gráficos e ademais, para quais utilizamos o GeoGebra. Ainda, o uso de jogos, buscados tanto na internet como também por meio de um acervo do curso qual somos discentes, fez com que os alunos se dispusessem de forma mais ampla a trabalharem com conteúdos de certa forma tensos, como por exemplo, a Trigonometria, onde utilizamos, ao caso da aula, o Pife Trigonométrico.

2.2 Cronograma

Tabela 1 - Cronograma do PROMAT 2022

Encontro	Data	Módulo	Conteúdo
1	21/05/2022	Trigonometria	Seno, cosseno, tangente no triângulo retângulo
2	28/05/2022		Circunferência, tipos de funções, domínio e imagem, período e função
3	04/06/2022		Relações trigonométricas
4	Assíncrono	Geometria Analítica	Coordenadas cartesianas, distância entre dois pontos, ponto médio
5	11/06/2022		Equação geral e reduzida da reta, posição relativa de duas retas no plano
6	25/06/2022		Equação geral e reduzida da circunferência, posições relativas envolvendo ponto, circunferência e reta.
7	Assíncrono	Análise Combinatória	Princípio Fundamental da Contagem
8	02/07/2022		Permutação, Arranjo e Combinação
9	09/07/2022		Probabilidade
10	Assíncrono	Tratamento da Informação	Interpretação de Gráficos, Tabelas e esquemas

Fonte: Autores (2022)

2.3 TRIGONOMETRIA

2.3.1 Plano de Aula 1

PROMAT – 1º ENCONTRO

21/05/2022

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender as Relações Trigonométricas no triângulo retângulo.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Seno, Cosseno e Tangente no triângulo retângulo, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas.
- Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações.
- Identificar e usar corretamente as relações.
- Resolver situações problemas envolvendo as relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Conteúdo:

Seno, Cosseno e Tangente no triângulo retângulo.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lápis, computador, projetor.

Encaminhamento metodológico:

1. **Dinâmica /** Dinâmica da Teia

   Objetivo: apresentar as pessoas de um grupo.

   Material: Um rolo de barbante.

   Com o rolo de barbante em mãos, o mediador precisará escolher um lugar no qual todos os integrantes do grupo possam se posicionar em um grande círculo.

Para dar início à dinâmica, o facilitador [você] precisa pegar a ponta do barbante e amarrá-la em seu dedo indicador.

Então, você se volta para o restante do grupo, dizendo o seu nome e fazendo uma apresentação pessoal. Diga o seu nome, qual a sua formação, com o que você trabalha, alguma informação que você considera importante sobre a sua vida pessoal, como um hobby, a sua comida preferida ou qualquer outra coisa que sentir vontade para compartilhar com aquelas pessoas.

Ao terminar a sua apresentação, jogue o rolo de barbante para qualquer outra pessoa do grupo e incentive-a a, também, amarrar o cordão em seu dedo indicador e a fazer uma apresentação pessoal, da mesma forma como você fez a sua. Mas deixe-a livre para compartilhar as informações que considerar importantes.

E quando essa pessoa terminar de se apresentar, peça que ela jogue o rolo de barbante para outra. A seguinte deverá fazer a mesma coisa, amarrar o barbante no dedo e se apresentar.

Quando todos tiverem terminado suas apresentações, o barbante terá formado uma grande teia no meio do círculo formado pelos integrantes do grupo. Dessa forma, peça para que todo mundo olhe e observe o emaranhado de conexões formadas.

Em seguida, peça para que a última pessoa a se apresentar desenrole o barbante de seu dedo e devolva o rolo para quem havia lhe jogado anteriormente, na primeira etapa da dinâmica. Ao fazer isso, ela deverá repetir o nome da pessoa e o que foi apresentado sobre a vida dela.

É importante que você, enquanto aplicador da dinâmica, peça para que os membros do grupo repitam da maneira mais fiel possível o que a pessoa anterior havia falado. Caso o participante da vez se esqueça o nome de seu antecessor, será permitido uma pequena “cola”, olhando para o crachá. Se, por acaso, a pessoa se lembrar de nada, ou tiver muita dificuldade, também será permitido que os colegas do grupo ajudem.

A Dinâmica da Teia deve prosseguir nessa sistemática até que o rolo retorne para as mãos do facilitador. Na sua vez, você precisará apresentar à turma a última pessoa que falou. Uma média de tempo gasto para essa atividade, em um grupo de 30 integrantes – por exemplo – é de 80 a 90 minutos.

O grande objetivo dessa dinâmica, além de apresentar as pessoas umas para as outras, dentro de um departamento, por exemplo, é promover a interação entre os participantes e melhorar a comunicação interna, de modo a gerar trabalho em equipe, trazendo resultados ainda melhores para a organização.

2. Introdução ao conteúdo

A trigonometria possui uma infinidade de aplicações práticas. Desde a antiguidade já se usava da trigonometria para obter distâncias impossíveis de serem calculadas por métodos comuns. Algumas aplicações da trigonometria são:

- Determinação da altura de um certo prédio.
- Os gregos determinaram a medida do raio de terra, por um processo muito simples.
- Seria impossível se medir a distância da Terra à Lua, porém com a trigonometria se torna simples.
- Um engenheiro precisa saber a largura de um rio para construir uma ponte, o trabalho dele é mais fácil quando ele usa dos recursos trigonométricos.

Tudo isto é possível calcular com o uso da trigonometria do triângulo retângulo. O triângulo é a figura mais simples e uma das mais importantes da Geometria, ele é objeto de estudos desde os povos antigos. O triângulo possui propriedades e definições de acordo com o tamanho de seus lados e medida dos ângulos internos. Quanto aos lados, o triângulo pode ser classificado da seguinte forma:

- Equilátero: possui os lados com medidas iguais.
- Isósceles: possui dois lados com medidas iguais.
- Escaleno: possui todos os lados com medidas diferentes.

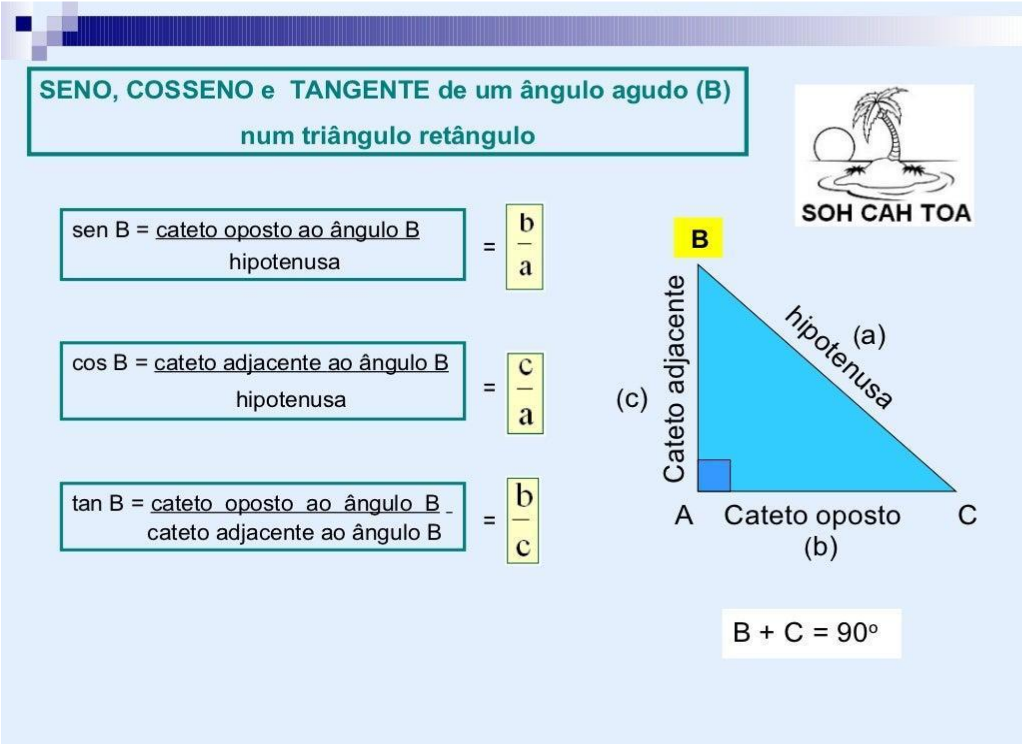
Quanto aos ângulos, os triângulos podem ser denominados:

- Acutângulo: possui os ângulos internos com medidas menores que 90º
- Obtusângulo: possui um dos ângulos com medida maior que 90º.
- Retângulo: possui um ângulo com medida de 90º, chamado ângulo reto.

No triângulo retângulo existem algumas importantes relações, uma delas é o Teorema de Pitágoras, que diz o seguinte: “A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa”. Essa relação é muito importante na geometria, atende inúmeras situações envolvendo medidas.

1.1 Relações Trigonométricas

Figura 1 - Relações Trigonométricas



Disponível em <https://www.slideshare.net/SandraBarreto4/razes-trigonomtricas-no-tringulo-retngulo-11326485/4>
Acesso em 04 de Abril de 2022

1.2 Seno, Cosseno e Tangente dos ângulos de 30º, 45 e 60º

Apesar de serem muito usados nos cálculos de Relações Trigonométricas do Triângulo Retângulo, os valores de seno cosseno e tangente dificilmente podem ser decorados, até mesmo porque são infinitos. Existem, entretanto, alguns ângulos que são tidos como notáveis.

Figura 2 - Valores dos Arcos Notáveis

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=FtP5L_SkZ4w>
Acesso em 04 de Abril de 2022

Após exemplificar e construir junto aos alunos a tabela, apresentaremos a música abaixo, em alusão a decorar os valores.

Música de Seno, Cosseno e Tangente

Um, dois três,
Três, dois, um,
Tudo sobre dois!
Depois vem a raiz,
Sobre o três e o dois!
A tangente é diferente,
Vejam só vocês!
Raiz de três sobre três,
Um raiz de três!

Essa letra deve ser cantada no ritmo e melodia da canção de Natal Jigle Bells.

Referências:

EXERCÍCIOS SOBRE SENO, COSSENO E TANGENTE. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br//matematica/seno-cosseno-tangente-angulos.htm. Acesso em 01 abr. 2022.

2.3.2 Relatório de Observação 1

No dia 21 (vinte e um) de maio de 2022, as 08:00, na Universidade Estadual do Oeste do Paraná, na sala A105, iniciamos o Projeto Promat 2022. O nosso grupo era formado pelos alunos, Ada Ramos, Leticia Toigo, Renan Pagliarine e Vinicius Vozniek. Os professores Amarildo e Felipe são os professores orientadores, ambos estarão presentes em sala durante todo o projeto.

No primeiro dia do projeto, a nossa colega Ada não pode estar presente. Havia 22 alunos escritos no projeto, porém na nossa primeira aula, tivemos a presença apenas de 12 alunos. Em um primeiro momento, informamos os alunos sobre a importância da presença e sobre como o projeto iria ocorrer, em seguida, nos apresentamos e solicitamos aos alunos presentes o número do celular de cada para que pudéssemos criar um grupo no WhatsApp, ele seria um meio de comunicação extrassala para passarmos informações sobre o projeto.

Posterior a nossa apresentação e as informações gerais sobre o projeto, iniciamos a nossa dinâmica com os alunos. A dinâmica da Teia, como chamamos, consistiu basicamente, em formar um círculo entre os alunos, pegar um rolo de linha em mãos, falar o nome, idade, onde mora, qual curso pretendia fazer futuramente e o que achasse importante, em seguida o aluno deveria jogar o rolo de barbante para outro aluno e assim sucessivamente até o todos os alunos terem se apresentado. Ao fim percebemos que o nosso barbante ligava todos os alunos formando uma grande teia. Nesse momento, falamos sobre o quão importante é estamos ligados um ao outro e que a união era muito importante nesse projeto. Por fim, pedimos aos alunos realizarem a volta do barbante, relatando o que lembrava sobre o que o colega havia falado.

Após a nossa dinâmica, iniciamos o nosso primeiro conteúdo sobre Trigonometria, que envolvia Seno, Cosseno e Tangente. Utilizamos slides para explanar o conteúdo e o quadro para resolvermos os exercícios. Apesar da nossa sala ter um problema no projetor, a aula ocorreu de forma agradável e digamos que esperada. Por ser o primeiro dia de aula, os alunos ainda estavam um pouco tímidos e não conversam muito, somente quando perguntávamos algo. Após o intervalo, continuamos explicando o conteúdo e resolvendo os exercícios com os alunos.

Ao chegar perto do horário de finalização da aula, fizemos a chamada para registrar quem estava presente. Alguns alunos nesse momento já haviam saído.

Antes de dispensar todos os alunos entregamos uma lista de exercícios, o qual era sobre a aula, para ser feito em casa, como forma de memorização e caso houvesse alguma dúvida iriamos tirar na próxima aula.

2.3.3 Plano de Aula 2

PROMAT – 2º ENCONTRO

28/05/2022

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Levar os alunos a compreenderem os conceitos de trigonometria no ciclo trigonométrico e resolver problemas que os envolvem.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com trigonometria, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender o que são ângulos, arcos e medidas de ângulo em grau e radiano;
- Converter radianos em grau e graus em radianos;
- Identificar ângulos suplementares, explementares, replementares e complementares;
- Construir o ciclo trigonométrico;
- Identificar e analisar as razões trigonométricas no ciclo trigonométrico;
- Reduzir arcos ao primeiro quadrante.

Conteúdo:

Trigonometria.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lápis, computador, projetor, listas de exercícios.

Atividade 01 (30 minutos)

Iniciaremos a aula relembrando os conteúdos da aula anterior, realizando a correção dos exercícios propostos para serem feitos em casa.

Atividade 02 (15 minutos)

Após, daremos início ao conteúdo de ângulos e arcos. Resolveremos, junto com os alunos, a seguinte questão:

1. Um pêndulo de 50 cm descreve um movimento no qual suas posições extremas formam um ângulo de 45º. Determine o comprimento dessa trajetória (de uma posição extrema à outra).

   Resolução:

   Se o movimento realizado completasse uma circunferência, o comprimento da trajetória seria $2\pi \times 50 = 100\pi\ cm$*. Porém, a trajetória envolve apenas uma parte dessa circunferência (relativa ao ângulo).*

   Se chamarmos de l (evite a letra l pois ela se confunde com o número 1)o comprimento da circunferência, temos:

$$l = \frac{2\pi r}{360°} = \frac{100\pi}{360°}.$$

Agora sendo x o comprimento da trajetória percorrida pelo pêndulo, temos a regra de três:

$$\frac{100\pi}{360°} = \frac{x}{45°} \quad \rightarrow \quad 360x = 4500\pi \quad \rightarrow$$

$$x = \frac{4500\pi}{360} \quad \rightarrow \quad x = 12{,}5\pi\ cm \quad \rightarrow \quad x \approx 39{,}27 cm.$$

Encaminhamento (30 minutos):

Após a resolução, indagaremos aos alunos como se chama essa trajetória realizada pelo pêndulo, com o intuito de abordar arco de circunferência. Assim, relembraremos primeiro o conceito de ângulo e, em seguida, definiremos arco, grau e radianos.

Def. **Ângulo:** Ângulo é a região do plano limitada por duas semirretas de mesma origem.

Para complementar, ainda vamos citar:

- Dois ângulos que têm a mesma medida são chamados de *ângulos congruentes*.
- Os ângulos são *complementares* se ao somá-los o resultado obtido é 90°.

- Os ângulos são *suplementares* se ao somá-los o resultado obtido é 180°.
- Os ângulos são r*eplementares* se ao somá-los o resultado obtido é 360°.

Def. **Arcos:** É cada uma das partes em que uma circunferência fica dividida por dois de seus pontos. Para complementar, ainda vamos citar:

- Dado um arco α, os arcos côngruos a ele são da forma

$$\alpha + k \cdot 360°, k \in Z.$$

Ex.: 60° é côngruo a -300, 420°, 780°, 1140°, ...

Def. **Grau:** É cada uma das 360 partes iguais da divisão de uma circunferência.

Def. **Radiano:** É a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência correspondente.

Começaremos a explicação relembrando que uma circunferência tem 2πr de comprimento. Com isso, dividiremos a circunferência ao meio, sendo assim, cada parte terá πr de comprimento, ou seja, 1π rad.

$$2\pi\ rad \text{ —— } 360°$$
$$\pi\ rad \text{ —— } 180°$$
$$\frac{\pi}{2}\ rad \text{ —— } 90°$$
$$\frac{\pi}{3}\ rad \text{ —— } 60°$$
$$\frac{\pi}{4}\ rad \text{ —— } 45°$$

Ex: Um arco mede 30°. Qual é a medida desse arco em radianos?

Resolução:

Podemos estabelecer a regra de três simples:

$$\pi\ rad \text{ —— } 180°$$
$$x \text{ —— } 30°$$

Daí, $x = \frac{30° \cdot \pi\ rad}{180°} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}\ rad.$

Atividade 03 (60 minutos)

Nesta atividade, iremos propor aos alunos a construção do ciclo trigonométrico. Procederemos da seguinte forma:

i. Entregaremos uma folha quadriculada e pediremos aos alunos que construam uma circunferência, de raio $r = 1$, centrada no ponto $O = (0{,}0)$ de um plano cartesiano;

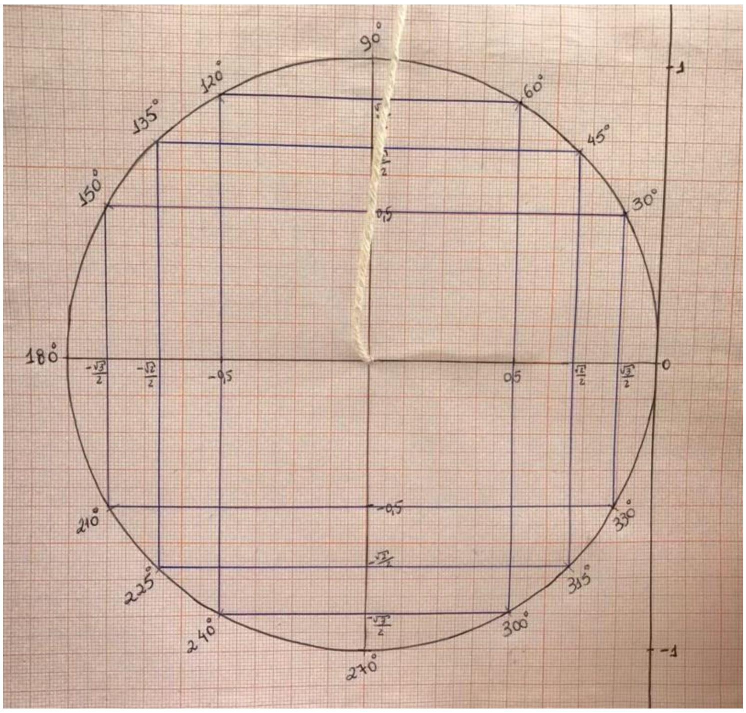
ii. Após eles deverão medir, com o auxílio do transferidor, e marcar os seguintes ângulos (considerando que o ângulo 0° é o ângulo que está sobre o eixo positivo das abcissas): $0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330°\ e\ 360°$;

iii. Solicitaremos que os alunos tracem uma reta tangente ao ponto $A = (1{,}0)$, sendo que essa será utilizada para medir a tangente de um ângulo.

iv. Pediremos que eles façam um furo no ponto O, no qual deverão passar um barbante que iremos entregar. O mesmo deverá ser colado no verso da folha.

v. Dessa forma, esperamos que eles construam algo como a imagem a seguir:

Figura 3 - Ciclo Trigonométrico



Fonte: Acervo dos autores (2022)

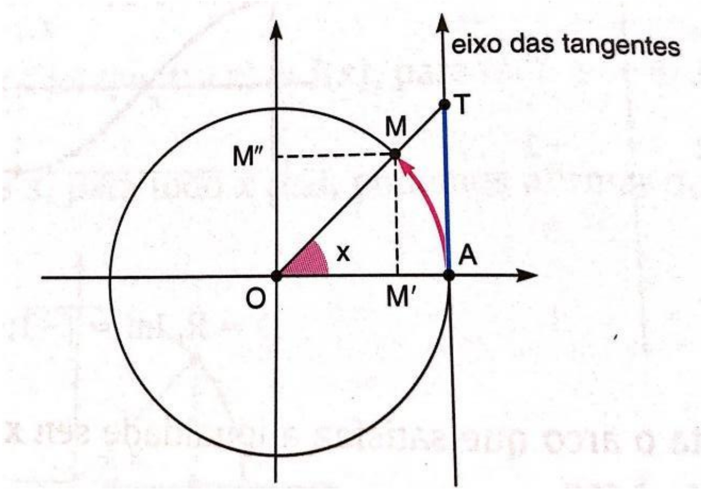
Atividade 04 (20 minutos)

Por meio do ciclo trigonométrico, construído na atividade anterior, mostraremos aos alunos como medir seno, cosseno e tangente de um ângulo. Ainda, relembraremos a divisão deste em quadrantes.

Consideremos o arco AM, da imagem abaixo, que corresponde ao ângulo central de medida x. Definimos:

- Seno de x é a ordenada do ponto M.
- Cosseno de x é a abscissa do ponto M.
- Tangente de x é a ordenada do ponto T.

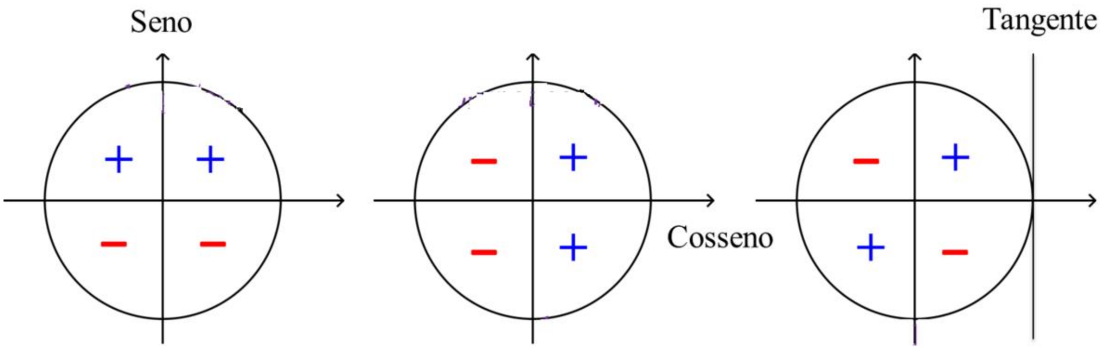
Figura 4 - Ciclo Trigonométrico I



Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

Ainda exploraremos os sinais que as funções assumem em cada quadrante:

Figura 5 - Sinais que as funções Seno, Cosseno e Tangente assumem em cada quadrante



Disponível em <
http://www.educabras.com/media/emtudo_img/upload/_img/20110223_141808.gif>
Acesso em 07 de Maio de 2022

Atividade 05 (30 minutos)

Após, explicaremos o conceito de redução de arcos ao primeiro quadrante, utilizando como auxílio o ciclo trigonométrico construído anteriormente.

Redução ao 1º quadrante:

Def. **Arcos Suplementares:** Dois arcos são suplementares quando a soma de suas medidas resulta em 180°.

Ex:

a) $120° \; e \; 60° \rightarrow 120° + 60° = 180°$

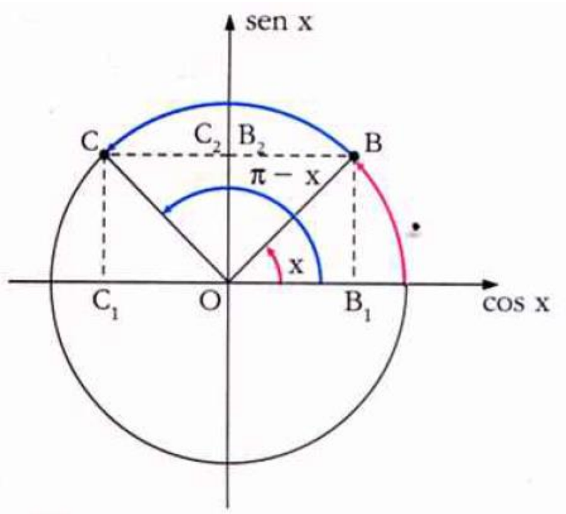
b) $x \; e \; \pi - x \rightarrow x + \pi - x = \pi$

Redução do 2° para o 1º quadrante:

Sejam os arcos:

- x (do 1º quadrante)
- $(\pi - x)$ (do 2º quadrante)

Figura 6 - Ciclo Trigonométrico II



Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

Sendo os pontos B e C simétricos com relação ao eixo dos senos, eles têm ordenadas iguais e abcissas opostas.

Assim, a partir do ciclo trigonométrico temos:

$$sen\,(\pi - x) = sen\,(x)$$
ou
$$sen\,(180° - x) = sen\,(x)$$

$$cos\,(\pi - x) = -cos\,(x)$$
ou
$$cos\,(180° - x) = -cos\,(x)$$

Def. **Arcos Explementares:** Dois arcos são explementares quando a diferença de suas medidas é 180°.

Ex:

a) $225° \; e \; 45° \rightarrow 225° - 45° = 180°$

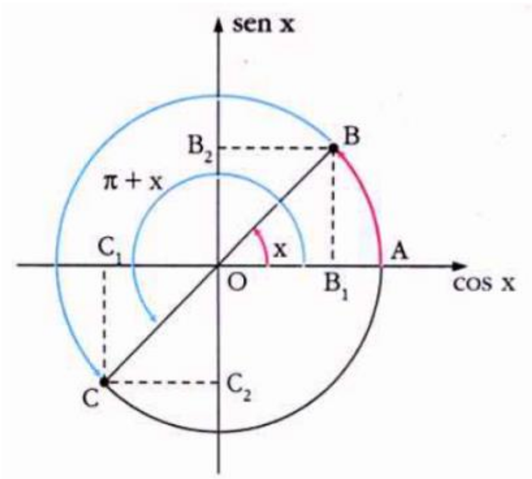
b) $x \; e \; \pi + x \rightarrow x - \pi + x = \pi$

Redução do 3º para o 1º quadrante:

Sejam os arcos:

- x (do 1º quadrante)
- $(x \; + \; \pi)$ (do 3º quadrante)

Figura 7 - Ciclo Trigonométrico III



Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

Sendo os pontos B e C simétricos em relação ao centro O da circunferência (diametralmente opostos), eles têm ordenadas opostas e abcissas opostas. Assim, a partir do ciclo trigonométrico temos:

$sen\,(\pi + x) = -sen\,(x)$ ou $sen\,(180° + x) = -sen\,(x)$	$cos\,(\pi + x) = -cos\,(x)$ ou $cos\,(180° + x) = -cos\,(x)$

Def. **Arcos Replementares:** Dois arcos são replementares quando a soma de suas medidas resulta em 360°.

Ex:

a) $300° \; e \; 60° \rightarrow 300° + 60° = 360°$

b) $x \; e \; (2\pi - x) \rightarrow x + (2\pi - x) = 2\pi$

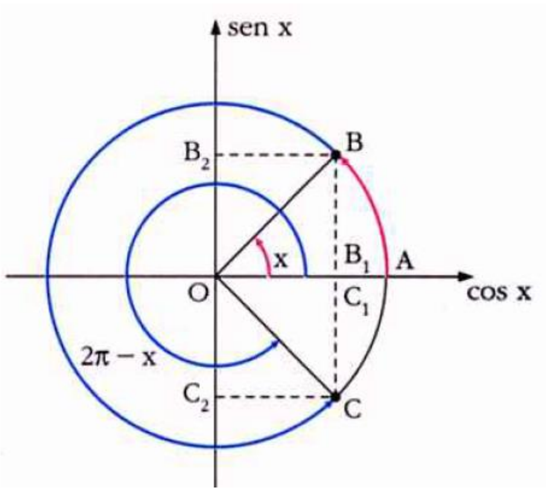
Redução do 4º para o 1º quadrante:

Sejam os arcos:

- x (do 1º quadrante)
- (2π - x) (do 4º quadrante)

Sendo os pontos B e C simétricos em relação ao eixo dos cossenos, eles têm ordenadas opostas e abscissas iguais.

Figura 8 - Ciclo Trigonométrico IV



Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

Assim, a partir do ciclo trigonométrico temos:

$$sen\ (2\pi - x) = -sen\ (x)$$
ou
$$sen\ (360° - x) = -sen\ (x)$$

$$cos\ (2\pi - x) = cos\ (x)$$
ou
$$cos\ (360° - x) = cos\ (x)$$

Atividade 06 (30 minutos)

Posteriormente, entregaremos aos alunos uma lista de exercícios, Anexo II, que deverá ser resolvida em sala pelos alunos nos grupos. Durante isso iremos auxiliá-los a encontrarem estratégias de resolução.

Avaliação:

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio da participação, resolução de exercícios em sala e em casa.

Referências:

GIOVANNI, Jose Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **Matemática fundamental: uma nova abordagem**. São Paulo: Ftd, 2002.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações.** 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

LEONARDO, Fabio Martins de (Ed.). **Conexões com a matemática.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

SANTOS, Edimar. **Gincana Trigonométrica.** Disponível em: <https://pt.slideshare.net/edimarlsantos/gincana-trigonomtrica>. Acesso em: 13 jul. 2019.

2.3.4 Relatório de Observação 2

Iniciamos a aula corrigindo os exercícios da lista deixados na aula anterior. Para ganharmos tempo, utilizados os slides da aula para apresentarmos as resoluções.

Em seguida, analisando o movimento de um pêndulo, mostramos aos alunos como, conhecendo a forma de calcular a medida do comprimento de uma circunferência $2\pi R$, onde R é o raio da circunferência (nesse caso o raio é o comprimento do pêndulo, ou seja, 50), podemos encontrar o comprimento de um arco qualquer.

Após isso, apresentamos aos alunos as definições e exemplos correspondentes medida de arco ou ângulo e de medida de comprimento de arco, além de algumas relações entre arcos.

Feito isso, distribuímos para os alunos, transferidores, réguas e compassos para que eles fizessem a construção de um ciclo trigonométrico, e marcassem alguns ângulos observando essas relações entre eles.

Os alunos participaram da atividade conforme esperado e, em geral, tiveram bastante facilidade para construir o ciclo com os instrumentos entregues.

Após a atividade, aproveitamos as construções dos alunos para definir o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo, analisar em quais quadrantes eles assumem valores positivos e negativos, e já obtermos também as relações entre ângulos simétricos com relação aos eixos coordenados e com relação a origem.

Por fim, deixamos como exercício algumas atividades, que eles iam resolvendo e, após alguns minutos, nós íamos corrigindo.

Ao final da aula, deixamos com os alunos uma lista com exercícios de vestibulares para que eles tentassem resolver em casa.

2.3.5 Plano de Aula 3

PROMAT – 3º ENCONTRO

04/06/2022

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Levar os alunos a compreenderem os conceitos de funções trigonométricas e resolver problemas que os envolvem.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com trigonometria, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar os valores que as funções Seno, Cosseno e Tangente assumem em cada um dos arcos notáveis, bem como analisar o sinal correspondente a cada arco de acordo com a analogia dos quadrantes;
- Identificar onde podemos medir os valores das funções Cotangente, Secante e Cossecante;
- Conhecer e esboçar os gráficos das funções Seno, Cosseno e Tangente.
- Entender como realizar operações entre arcos.

Conteúdo:

Funções trigonométricas.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lápis, computador, projetor, listas de exercícios

Atividade 01 (30 minutos)

Iniciaremos a aula relembrando os conteúdos da aula anterior, realizando a correção dos exercícios propostos para serem feitos em casa.

Atividade 02 (60 minutos)

Após, explanaremos o conteúdo de funções trigonométricas. Apresentaremos a representação gráfica, o domínio e a imagem das funções seno, cosseno e tangente e por fim iremos projetar as definições destas funções.

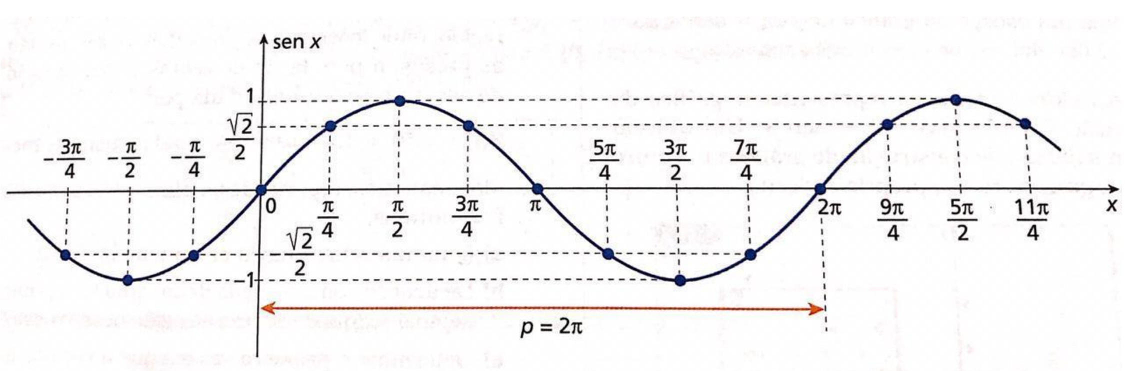
Utilizaremos uma tabela com os valores da função seno, cosseno e tangente em alguns pontos, a qual será construída com o auxílio do ciclo trigonométrico desenvolvido na aula anterior. Na sequência, utilizando a tabela será solicitado aos alunos que construam o gráfico da função seno.

Tabela 2 - Relações entre os Ângulos

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{0°}$	$\boldsymbol{45°}$	$\boldsymbol{90°}$	$\boldsymbol{135°}$	$\boldsymbol{180°}$	$\boldsymbol{225°}$	$\boldsymbol{270°}$	$\boldsymbol{315°}$	$\boldsymbol{360°}$
$\boldsymbol{sen\ (x)}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\boldsymbol{cos\ (x)}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\boldsymbol{tg\ (x)}$	0	1	$\nexists$	-1	0	1	$\nexists$	-1	0

Fonte: Autores (2022)

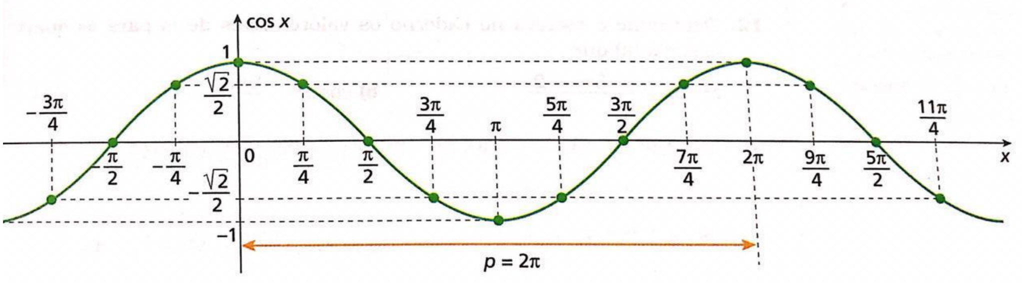
Figura 9 - Gráfico da função Seno



Fonte: Leonardo (2013)

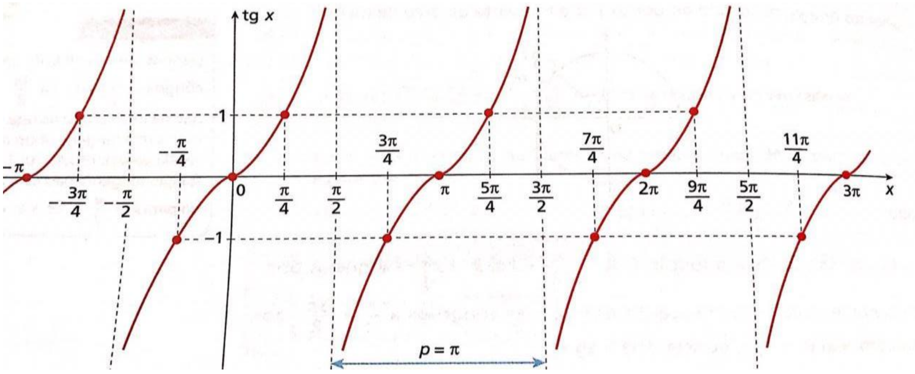
Após isso, com o *software* Geogebra, construiremos os gráficos das funções, indicando seu domínio e imagem. Mostraremos também, o que acontece quando temos uma constante multiplicando a função, ou/e o argumento da mesma. Ainda, trabalharemos com os conceitos de período e amplitude da função.

Figura 10 - Gráfico da função Cosseno



Fonte: Leonardo (2013)

Figura 11 - Gráfico da função Tangente



Fonte: Leonardo (2013)

Def. A função seno é a função $f: R \rightarrow R$ que associa cada número real x ao número real $y_p = sen\ (x)$, ou seja $f(x) = sen\ (x)$.

Def. A função cosseno é a função $f: R \rightarrow R$ que associa cada número real x ao número real $x_p = cos\ (x)$, ou seja $f(x) = cos\ (x)$.

Def. A função tangente é a função $f: R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\} \rightarrow R$ que associa cada número real x ao número real $y_t = tg\ (x)$, ou seja $f(x) = tg\ (x)$.

Atividade 03 (30 minutos)

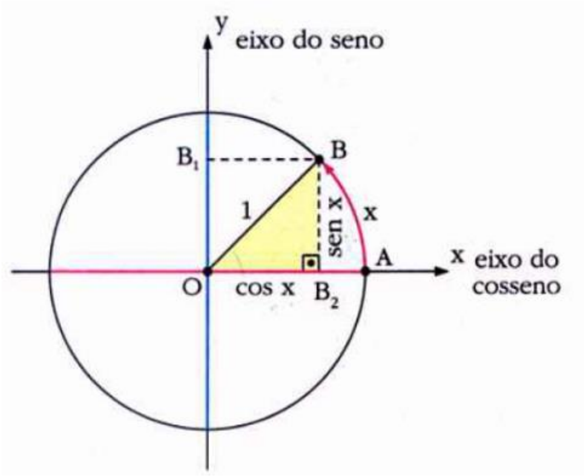
Nessa atividade explicaremos aos alunos as relações trigonométricas fundamentais.

1ª) $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$

O arco AB possui como medida o número x:

- $sen\ (x) = \underline{OB_1}$
- $cos\ cos\ (x) = \underline{OB_2}$
- O raio é unitário (r =1)

Figura 12 - Relação Trigonométrica



Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

2ª) $tg\ (x) = \frac{sen\ (x)}{coscos\ (x)}$

3ª) $cotg\ (x) = \frac{cos\ (x)}{sen\ (x)}$ ou $cotg\ (x) = \frac{1}{tg\ (x)}$

4ª) $sec\ (x) = \frac{1}{cos\ (x)}$

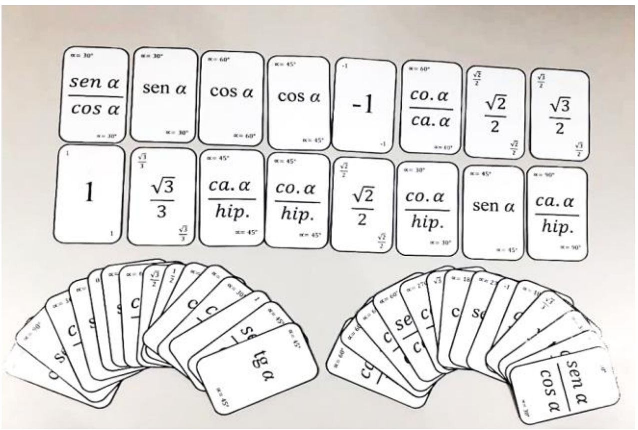
5ª) $cossec\ (x) = \frac{1}{sen\ (x)}$

Novamente, com o auxílio do *software* Geogebra, mostraremos como encontrar os valores da cotangente, secante e cossecante.

Atividade 03 (40 minutos)

Posteriormente, destinaremos um tempo para a execução do jogo Pife trigonométrico, descrito a seguir:

Figura 13 - Pife Trigonométrico



Disponível em <

Confeccionamos o jogo “Pife trigonométrico”, que será impresso em papel vergê, encapado com plástico transparente e posteriormente recortado.

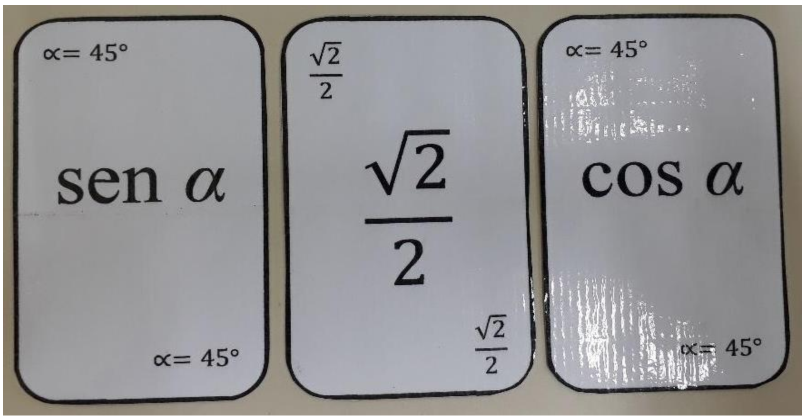
Os estudantes já estarão dispostos em grupos de quatro estudantes. Para o jogo, manter-se-á essa organização. Sendo que é necessário no mínimo dois jogadores e no máximo quatro.

O jogo é composto por um baralho trigonométrico com 38 cartas. Um jogador deve embaralhar as cartas, depois de embaralhado, um outro jogador deverá separar o baralho em duas partes onde achar conveniente, após isso deve-se juntar novamente os montes de modo que a que estava embaixo fique em cima. O jogador que embaralhou irá distribuir as cartas, seis cartas para cada participante (sugestão uma carta por vez para cada jogador).

Das seis cartas recebidas, cada jogador deve formar duas trincas de razões trigonométricas equivalentes. Por exemplo: caso o jogador faça uma trinca com as razões do seno 30°: a medida do $cateto\ oposto$ (30°) dividido pela medida da $hipotenusa = sen\, 30° \ = \ 1/2$. O jogador que fizer dois trios primeiro, mostra ao adversário e, se estiver correto, ganha o jogo, somando um ponto. Se o jogador fizer um trio e uma sequência relacionando quatro cartas (utilizando uma carta descartada na mesa) ele ganha com sete cartas, neste caso ele somará três pontos. Ganha aquele jogador que fizer dez pontos primeiro.

Verificando as razões do baralho, vemos que cada razão tem pelo menos um trio formado, mas podemos associar outras ternas como: $sen\, 45° \ = \ cos\, 45° \ = \ \sqrt{2}/2$ (ver Figura 8) o que nos possibilita fazer um jogo já que o resultado da razão é o mesmo, as jogadas que tiverem a mesma representação como: $1/2, 1/2$ e $sen\, 30°$ não serão válidas, pois o intuito é associar cartas equivalentes e representações distintas.

Figura 14 - Trinca possível para o jogo Pife Trigonométrico



Fonte: Acerco dos Autores (2022)

Quem inicia o jogo é o jogador que separou o baralho em duas partes depois de embaralhado, o qual deverá pegar uma carta do monte que sobrou e verificar se consegue formar uma trinca ou até mesmo um par, devendo descartar uma carta a sua escolha, com a face para cima, ao lado do monte. O jogador sequente, à direita de quem iniciou, pode pegar a carta descartada anteriormente ou, se preferir, pegar no monte e descartar uma de suas cartas. Da mesma forma, segue-se sucessivamente, até o fim do jogo.

Quando jogado com três ou quatro participantes e o descarte de um jogador servir para completar a trinca que falta para outro jogador ganhar, este poderá antecipar-se ao jogador sequente vencendo assim a partida, porém, caso se engane só poderá vencer pegando a carta do monte, ou a carta descartada pelo seu antecessor.

Atividade 05 (40 minutos)

Após, entregaremos aos alunos uma lista de exercícios para serem resolvidos na sala, Anexo III. Durante essa atividade auxiliaremos os alunos nos grupos.

Avaliação:

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio da participação, resolução de exercícios em sala e em casa.

Referências:

GIOVANNI, Jose Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **Matemática fundamental: uma nova abordagem**. São Paulo: Ftd, 2002.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações.** 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

LEONARDO, Fabio Martins de (Ed.). **Conexões com a matemática.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PROVA DO ENEM 2018. Disponível em: < http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/2DIA_05_AMARELO_BAIXA.pdf>. Acesso em: 13 jun. 2019.

ZEFERINO, Leandro. **Jogos Matemáticos nas Aulas do Ensino Médio: Pife Trigonométrico**. Disponível em: <http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/86510/mod_resource/content/1/TCC%20Leandro.pdf>. Acesso em 12 jun. 2019.

2.3.6 Relatório de Observação 3

No dia 04 (quatro) de junho de 2022, as 08:00, na Universidade Estadual do Oeste do Paraná, na sala A105, demos continuidade ao Projeto Promat 2022. O nosso grupo era formado pelos alunos, Ada Ramos, Leticia Toigo, Renan Pagliarine e Vinicius Vozniek. Os professores Amarildo e Felipe, são os professores orientadores, ambos estarão presentes em sala durante todo o projeto.

Iniciamos a aula resolvendo alguns exercícios da aula anterior, visando resgatar o conteúdo tratado para dar início ao próximo conteúdo. Os alunos tiveram algumas dúvidas para resolver, mas ao final conseguimos sanar todas as dúvidas que eles trouxeram. Em seguida demos início ao conteúdo a ser abordado na aula 3. O conteúdo da aula 3 era funções trigonométricas, começamos essa parte do conteúdo mostrando as representações gráficas das funções trigonométricas para que os alunos pudessem compreender como as funções se comportam graficamente. Usamos o Geogebra para mostrar isso, mas facilmente aos alunos. Alguns alunos comentaram sobre a dificuldade de utilizar esse software, então mostramos algumas funções do software e como utiliza-lo. Em seguida falamos sobre a função seno, cosseno e tangente e seu comportamento no ciclo trigonométrico e aplicamos um exercício para que os alunos resolvessem.

Após toda a explicação, tivemos que relembrar bem com os alunos a ideia de relação trigonométrica pois iriamos aplicar um jogo que precisava ter essas relações bem definidas. Levamos algum tempo para que os alunos relembrassem e também para explicar o jogo. Após o intervalo começamos a jogar. O jogo consistia em uma pife trigonométrico, onde eram entregues 9 cartas e o objetivo era fazer 3 trincas de relações trigonométricas, por exemplo, seno, cosseno e tangente de 30 graus ou seno de 30 graus, cateto oposto/ hipotenusa de 30 graus e 1/2, são exemplos de trincas que tem relações.

Jogamos durante todo o período após intervalo e os alunos se divertiram bastante. Deu para relembrar muitas relações.

2.4 GEOMETRIA ANALÍTICA

2.4.1 Plano de Aula 4

PROMAT – 4º ENCONTRO

ASSÍNCRONO

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Trabalhar com geometria analítica.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com geometria analítica, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Localizar pontos no plano cartesiano;
- Explorar o plano cartesiano e suas partes;
- Determinar a distância entre dois pontos;
- Determinar o ponto médio de um segmento;
- Verificar se três pontos são colineares.

Conteúdo:

Geometria Analítica.

Recursos Didáticos:

Aula expositiva e dialogada em sistema de streaming utilizando o Google Meet, Software GeoGebra e outros sites (Mentimenter, Miro) para participação conjunta, em gravação, a ser cedida aos alunos.

Atividade 01 (05 minutos)

No primeiro momento da aula, iremos relatar aos alunos, que nas próximas aulas do curso, iremos abordar um novo conteúdo, a saber, Geometria Analítica. Durante três encontros iremos trabalhar com os tópicos mais importantes que permeiam este conteúdo matemático.

Atividade 02 (10 minutos)

Para introduzir o novo conteúdo, iremos relatar aos alunos que o conteúdo de Geometria Analítica, é analisado através de elementos e processos algébricos. O primeiro elemento é o Ponto, em seguida vem a reta e por fim a circunferência.

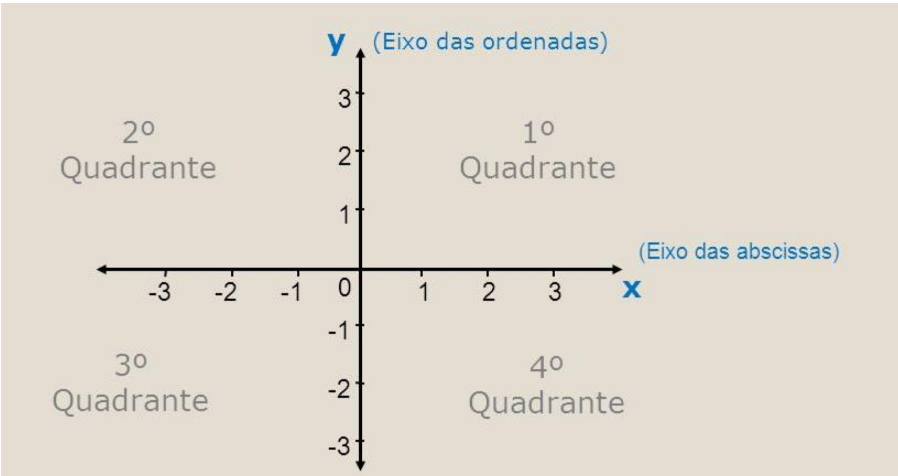
De início, vamos mostrar como proceder com estudo do Ponto, e qual sua função, para isso iremos falar sobre o plano cartesiano.

Ao falar sobre plano cartesiano, precisamos definir quais os elementos que são necessários para identificação de um plano, e ainda falar sobre alguns elementos implícitos a sua abordagem.

Elementos de um plano cartesiano:

- Dois eixos; X e Y, onde, X denomina-se eixo das abscissas e Y o eixo das ordenadas.
- O ponto 0, denominado origem, que é a intersecção dos eixos X e Y.
- Quadrantes; todo plano cartesiano possui quatro quadrantes em sua constituição. Como visto na imagem a seguir:

Figura 15 - Quadrantes do ciclo trigonométrico



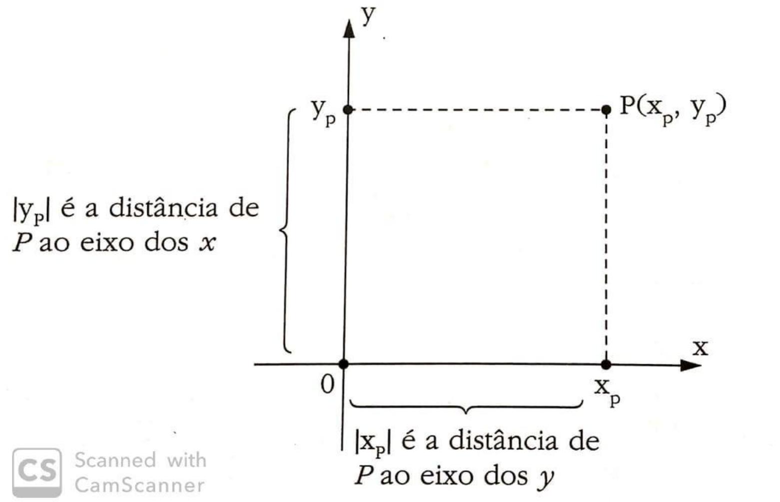
Disponível em <https://slideplayer.com.br/slide/6824013/>
Acesso em 04 de Junho de 2022

Um plano cartesiano é composto de duas retas numéricas reais que se interceptam formando um ângulo de 90º.

Para localizar um ponto sobre o plano cartesiano, necessitamos de duas coordenadas, uma delas, representa a posição do ponto em relação ao eixo X, e a outra representa a posição do ponto em relação ao eixo Y, e é representado como: $P(X_{P\,,}Y_P)$.

Mostraremos que o Ponto P procurado, se localiza exatamente na intersecção das projeções da coordenada da abscissa com a ordenada. E que o $|Y_P|$, se refere a à distância de P ao eixo X, analogamente segue o $|X_P|$, utilizando de um exemplo.

Figura 16 - Representação geométrica da localização do ponto



Fonte: Filho e Barreto (2000)

Atividade 3 (20 Minutos)

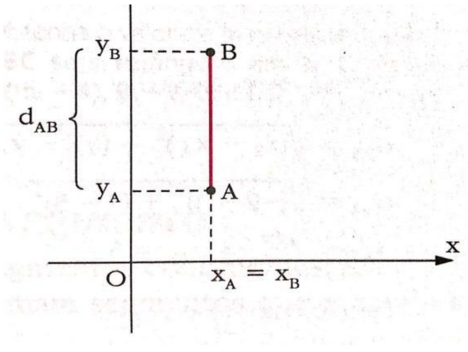
Em seguida vamos abordar o conceito de distância entre pontos. Um dos conceitos básicos da Geometria diz que a menor distância entre dois pontos é dada por uma reta. Na Geometria Analítica, esses pontos recebem coordenadas no plano cartesiano e, por meio dessas coordenadas, podemos encontrar o valor d distância entre dois pontos.

A distância entre dois pontos A (X_A, Y_A) e B (X_B, Y_B), situados num plano cartesiano, pode ser determinada em função das suas coordenadas. Vejamos:

1º caso – O segmento AB é paralelo ao eixo Oy, onde a distância d_{AB} é o módulo da diferença entre abscissas.

$$d_{AB} = |Y_B - Y_A|$$

Figura 17 - Distância entre pontos I

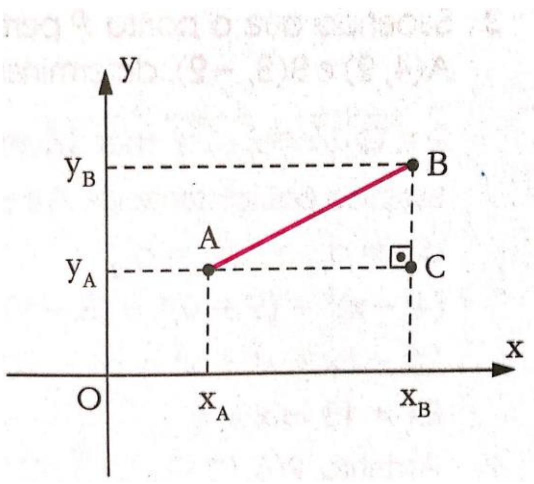


Fonte: Filho e Barreto (2000)

2º caso - O segmento AB é paralelo ao eixo Ox, onde a distância d_{AB} é o módulo da diferença entre ordenadas.

$$d_{AB} = |X_B - X_A|$$

Figura 18 - Distância entre pontos II



Fonte: Filho e Barreto (2000)

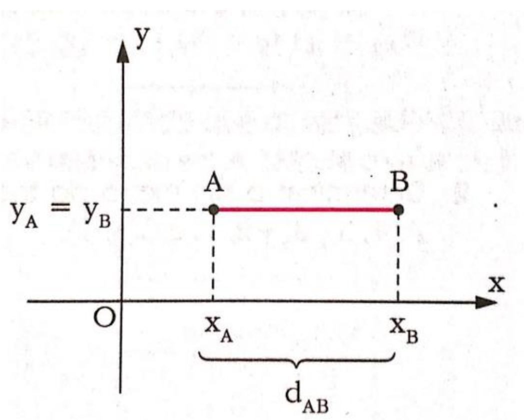
3º caso – O segmento AB não é paralelo a nenhum eixo. A distância d_{AB} depende das diferenças entre abscissas e ordenadas, de tal forma que, ao aplicarmos o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$d_{AB}^2 = d_{AC}^2 + d_{BC}^2$$

$$d_{AB}^2 = (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2$$

$$d_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

Figura 19 - Distância entre pontos III



Fonte: Filho e Barreto (2000)

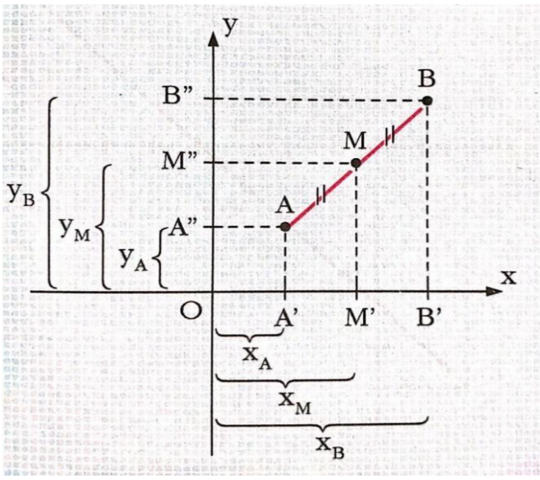
Exemplo: Determine a distância entre os seguintes pares de pontos:

a) $A\ (2,-3)$ e $B\ (5,-3)$
b) $C\ (-2,6)$ e $D\ (-2,4)$
c) $E\ (3,7)$ e $F\ (1,1)$

Atividade 4 (15 minutos)

Daremos continuação a aula, trabalhando com o conceito do Ponto Médio de um Segmento. Iniciaremos com o seguinte exemplo:

Figura 20 - Representação geométrica do PM



Fonte: Filho e Barreto (2000)

Calcule as coordenadas do ponto médio do segmento AB, tal que $A = (1,1)$ e $B = (3,5)$.

Após, faremos a generalização. Podemos observar que o ponto M divide $\underline{AB}$ em dois segmentos congruentes: $\underline{AM}$ e $\underline{MB}$. As projeções de A, M e B nos eixos Ox e Oy formam segmentos que mantêm as relações.

$$\underline{A'M'} = \underline{M'B'} \quad \text{e} \quad \underline{A''M''} = \underline{M''B''}$$

Determinando a abscissa X_M do ponto médio M, temos:

$$\underline{A'M'} = \underline{M'B'}$$
$$X_M - X_A = X_B - X_M$$
$$X_M + X_M = X_A + X_B$$
$$2X_M = X_A + X_B$$
$$X_M = \frac{X_A + X_B}{2}$$

Da mesma forma, obtemos a ordenada Y_M do ponto médio M, a partir de $\underline{A'M'} = \underline{M'B'}$.

$$Y_M = \frac{Y_A + Y_B}{2}$$

Resumindo, as coordenadas do ponto médio M de um segmento AB são dadas por:

$$\text{M}\left(\frac{X_A+X_B}{2}, \frac{Y_A+Y_B}{2}\right)$$

Atividade 5 (10 minutos)

Após, mostraremos aos alunos o conceito de Colinearidade de três pontos. Três pontos, estão alinhados, ou seja, fazem parte de uma mesma reta r, se, e somente se, o determinante da matriz, formada pelas coordenadas dos pontos, for nulo.

Três pontos $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)\ e\ C = (x_C, y_C)$, são colineares se, e somente se:

$$|x_A\ y_A\ 1\ x_B\ y_B\ 1\ x_C\ y_C\ 1\ | = 0.$$

Se $Det \neq 0$, os pontos são vértices de um triângulo.

Exemplo: Dados os pontos $A(3,1)$, $B(0,3)$ e $C(-3,5)$, verifique se estes pertencem a mesma reta.

Avaliação:

A avaliação se desenvolverá no decorrer da próxima aula, pois será a continuação do conteúdo da aula assíncrona, com correção dos exercícios da lista, Anexo IV.

Referências:

GIOVANNI, Jose Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **Matemática fundamental: uma nova abordagem**. São Paulo: Ftd, 2002.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações.** 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

LEONARDO, Fabio Martins de (Ed.). **Conexões com a matemática.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

FILHO, Benigno Barreto; SILVA, Cláudio Xavier da. **Matemática: Aula por aula.** São Paulo: Ftd, 2000.

PROVA DO ENEM 2014. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 09 set. 2019.

PROVA DO ENEM 2016. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 09 set. 2019.

2.4.2 Plano de Aula 5

PROMAT – 5º ENCONTRO

11/06/2022

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Trabalhar com conceito de retas.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com conceito de retas, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Determinar a equação geral e a partir disso, a equação reduzida de uma reta;
- Determinar o coeficiente angular da reta e compreender que a inclinação da reta é definida pelo coeficiente angular;
- Identificar a posição relativa entre duas retas.
- Resolver exercícios que envolvam o conceito de reta;

Conteúdo:

Geometria Analítica.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, listas de exercícios.

Encaminhamento metodológico:

Atividade 01 (30 minutos)

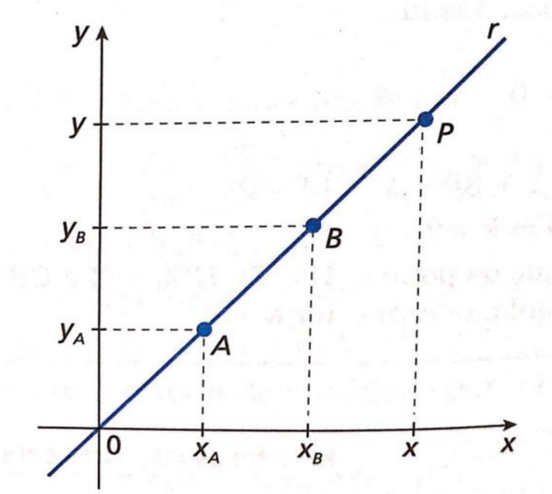
Iniciaremos a aula relembrando os conteúdos da aula anterior, realizando a correção de alguns exercícios propostos para serem feitos em casa.

Atividade 02 (20 minutos)

Após, iremos definir a equação geral da reta.

Def. Dados dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, pertencentes à reta r, vamos determinar uma relação entre as coordenadas de um ponto genérico, $P(x, y)$, também pertencente à reta r.

Figura 21 - Equação Geral da Reta



Fonte: Autores (2022)

As equações na forma $ax + by + c = 0$, são expressões representativas de retas do plano. Os coeficientes a, b e c são números reais constantes, considerando a e b diferentes de 0. A essa representação, damos o nome de equação geral da reta. A equação geral pode ser construída de duas formas:

1- Através da determinação do coeficiente angular da reta, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ utilizando a equação $y - y_1 = m(x - x_1)$.

2- Através de uma matriz quadrada formada pelos pontos pertencentes à reta fornecida.

Pela condição de alinhamento para os pontos A, B,P, podemos escrever:

$$|x\ y\ 1\ x_A\ y_A\ 1\ x_B\ y_B\ 1\ | = 0 \Rightarrow (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_A y_B - x_B y_A = 0$$

Como, nesse determinante, as únicas variáveis são x e y, os outros elementos são números reais conhecidos. Assim, podemos fazer:

$$(y_A - y_B) = a$$

$$(x_B - x_A) = b$$

$$x_A y_B - x_B y_A = c$$

Não sendo a e b simultaneamente nulos, obtemos a **equação geral da reta:**

$$ax + by + c = 0$$

1ª forma

Exemplo: Obter a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(-1{,}3)$ e $B(3{,}2)$.

Resolução: Primeiro iremos encontrar o valor do coeficiente angular,

$$m = \frac{2-3}{3-(-1)} = m = \frac{-1}{4} = m = -\frac{1}{4}$$

Agora, utilizando a equação $y - y_1 = m(x - x_1)$. Iremos substituir o valor de m e encontrar a equação desejada.

Para $A(-1{,}3)$

$$y - 3 = -\frac{1}{4}(x+1)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}.$$

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + 3$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$$

Para $B(3{,}2)$

$$y - 2 = -\frac{1}{4}(x-3)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}.$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + 2$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$$

2ª forma

Exemplo: Obter a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(-1{,}3)$ e $B(3{,}2)$.

Resolução: Considere um ponto $P(x, y)$ pertencente à reta r. Ele está alinhado com os pontos A e B. Pela condição de alinhamento de três pontos, temos:

$|x\ y\ 1\ \ -1\ 3\ 1\ 3\ 2\ 1\,| \ = 0 \Rightarrow 3x + 3y - 2 - 9 - 2x + y = 0 \Rightarrow x + 4y - 11 = 0$

Portanto, a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B é:

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4} = 0$$

Atividade 03 (40 minutos)

Posteriormente, iremos propor uma questão, na qual objetiva-se discutir sobre o coeficiente angular da reta.

Questão: (Leonardo (2013)) Um laboratório estudou uma colônia de bactérias composta por 350 indivíduos vivos. Verificou-se que, após a aplicação de certa droga, o número de indivíduos vivos na colônia diminuía com o tempo, sendo que, após 25 horas, não havia mais nenhum indivíduo vivo na colônia. Supondo que o número y de indivíduos vivos varie linearmente com o tempo x de vida, contando a partir da administração da droga, pede-se:

a) Determinar a expressão que relaciona y a x;
b) O número de indivíduos que permaneciam vivos após 10 horas do início do experimento.

Resolução:

a) Vamos considerar o par ordenado (x, y) para identificar que, após x horas, havia y indivíduos vivos na colônia. Assim, temos pontos com os seguintes significados:

- *A= (0,350): estado inicial da colônia (no tempo 0h, havia 350 indivíduos);*
- *B= (25,0): estado final da colônia (no tempo 25h, havia 0 indivíduo).*

Como a relação é linear, seu gráfico é um conjunto de pontos pertencentes à reta que passa pelos pontos A e B.

Formalização:

O coeficiente angular m de uma reta $\overleftrightarrow{AB}$ qualquer é dada por:

$$m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

O coeficiente angular m da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é

$$m = \frac{0 - 350}{25 - 0} = -14.$$

A reta tem coeficiente angular $m = -14$ e passa por B = (25,0). Assim como:

A equação da reta que passa por $A = (x_A, y_A)$ e tem coeficiente angular m é

$$y - y_A = m(x - x_A).$$

Logo,

$$y - 0 = -14(x - 25) \Rightarrow y = -14x + 350 \Rightarrow y + 14x - 350 = 0.$$

b) Para obter o número de indivíduos vivos após 10 horas do início do experimento basta substituir x por 10 na igualdade $y = -14x + 350$. *Assim:*

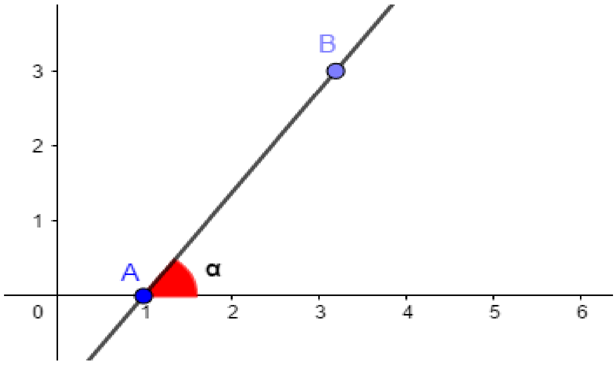
$y = -14 \cdot 10 + 350 = 210.$

Portanto, após 10 horas, havia 210 indivíduos vivos na colônia de bactérias.

Após correção desta questão, deduziremos, juntamente com os alunos, que o coeficiente angular é a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo x.

Para isso consideremos a reta que passa por A e B e faz um ângulo α com o eixo x:

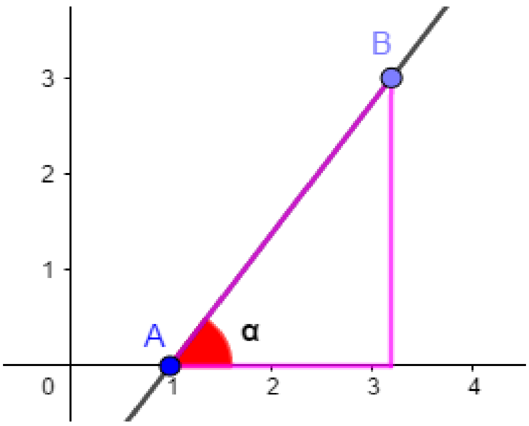
Figura 22- Reta que passa por A e B e faz um ângulo α com o eixo x



Fonte: Autores (2022)

Notemos que $y_B - y_A$ é a diferença entre os valores de y de A e B (medida do cateto oposto a α) e $x_B - x_A$ é a diferença entre os valores de x de A e B (medida do cateto adjacente a α). Assim percebemos o seguinte triângulo retângulo na figura anterior:

Figura 23 - Ilustração do triângulo



Fonte: Autores (2022)

Tomando como referência o ângulo α, sabemos a medida de seu cateto oposto e adjacente, logo podemos escrever m como:

$$m = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \alpha}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \alpha} = tg\ \alpha.$$

Assim podemos concluir que:

Se:

- $0° \leq \alpha < 90° \Rightarrow m \geq 0$;
- $90° < \alpha < 180° \Rightarrow m < 0$;
- $\alpha = 90° \Rightarrow tg\ 90°\ não\ é\ definida.$

Atividade 04 (20 minutos)

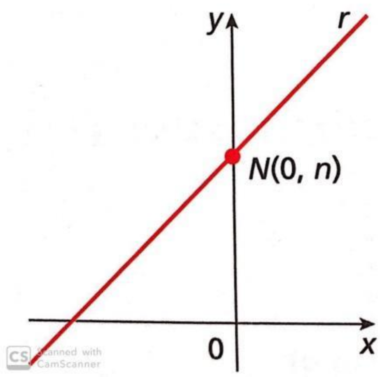
Em seguida, iremos definir a equação reduzida da reta.

Def. Sabemos que a equação da reta r que passa por um ponto $A(x_A, y_A)$ e tem coeficiente angular m é dada por $y - y_A = m(x - x_A)$.

Como a reta r intercepta o eixo y no ponto $N(0, n)$, temos:

$$y - n = m(x - 0) \Rightarrow y - n = mx \Rightarrow y = mx + n$$

Figura 24 - Equação reduzida da reta.



Fonte: Autores (2022)

A forma $y = mx + n$ é denominada **equação reduzida da reta**, em que m é o coeficiente angular da reta e n é a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo y.

Exemplo: Escrever na forma reduzida a equação da reta que passa pelo ponto $A(2,5)$ e tem coeficiente angular $m = -1$.

Resolução: Como $m = -1$ e $A(2,5)$, temos:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

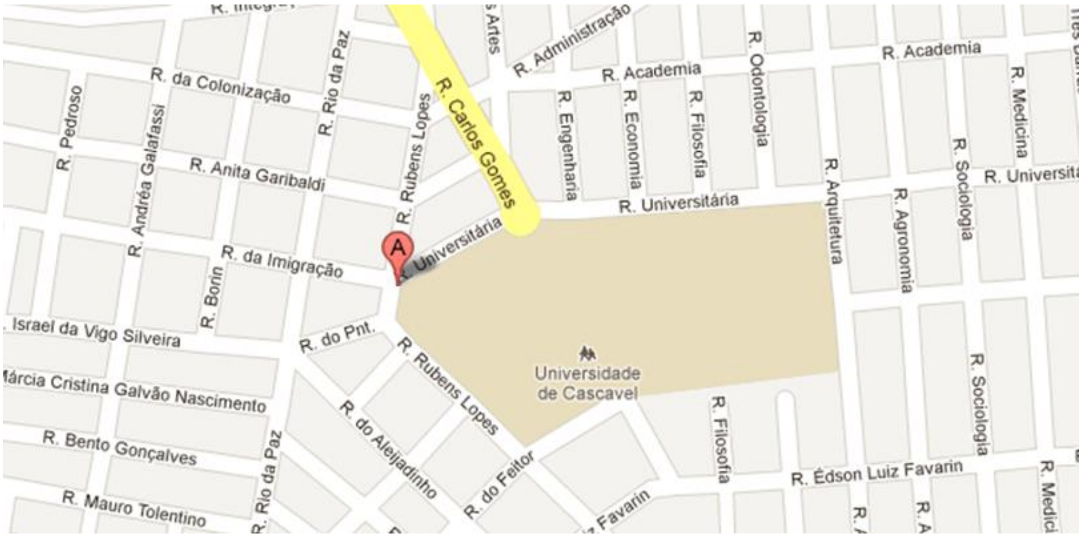
$$y - 5 = -1(x - 2) \Rightarrow y - 5 = -x + 2 \Rightarrow y = -x + 7$$

Portanto, a equação reduzida da reta que passa pelo ponto $A(2,5)$ e tem coeficiente angular $m = -1$ é $y = -x + 7$.

Atividade 05 (30 minutos)

Neste momento iremos abordar o conteúdo de posições relativas entre duas retas, por meio da seguinte atividade.

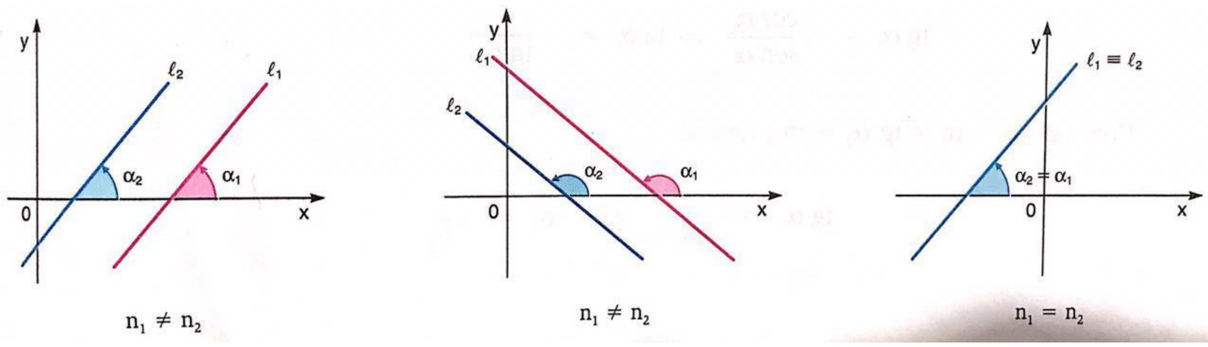
Questão 1: Com base no mapa abaixo responda os seguintes questionamentos:



a) Dê exemplos de ruas que são paralelas?
b) Dê exemplos de ruas que são concorrentes?
c) Dê exemplos de ruas que são perpendiculares?
d) A rua Rio da Paz e a rua do Aleijadinho são perpendiculares? Por quê?
e) Quais das ruas que aparecem no mapa são paralelas à rua Anita Garibaldi?
f) Quais das ruas que aparecem no mapa são perpendiculares à rua Universitária?

A partir dessas perguntas e das respostas dos alunos, iremos definir retas paralelas, coincidentes e concorrentes.

Figura 25 - Retas Paralelas e Coincidentes



Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

1° caso: $\alpha_1 = \alpha_2 \neq 90°$, temos:

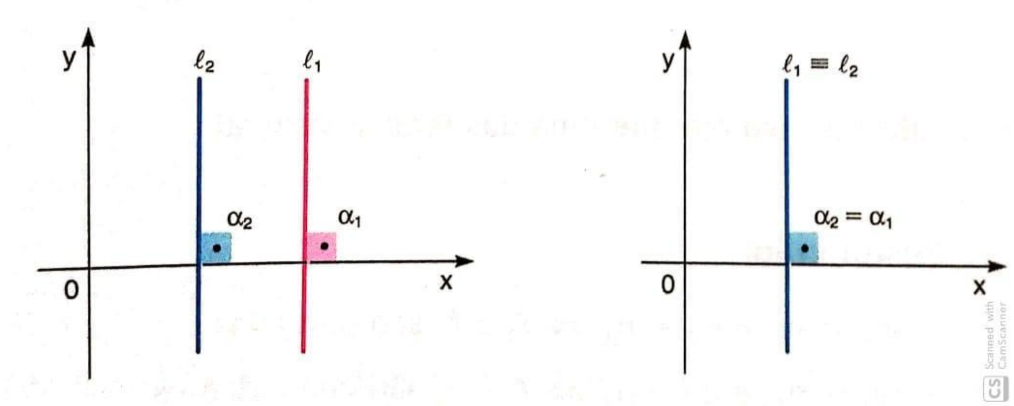
$$\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow tg\alpha_1 = tg\alpha_2 \leftrightarrow m_1 = m_2$$

Nesse caso, as retas l_1 e l_2 são paralelas $(l_1 // l_2)$, ou coincidentes $(l_1 \equiv l_2)$, ou seja, mesmo coeficiente angular.

2° caso: $\alpha_1 = \alpha_2 = 90°$. temos:

Particularmente teremos, $m_1 = tg\alpha_1$ e $m_2 = tg\alpha_2$ não estão definidos e as retas l_1 e l_2 são verticais.

Figura 26 - Retas Verticais



Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

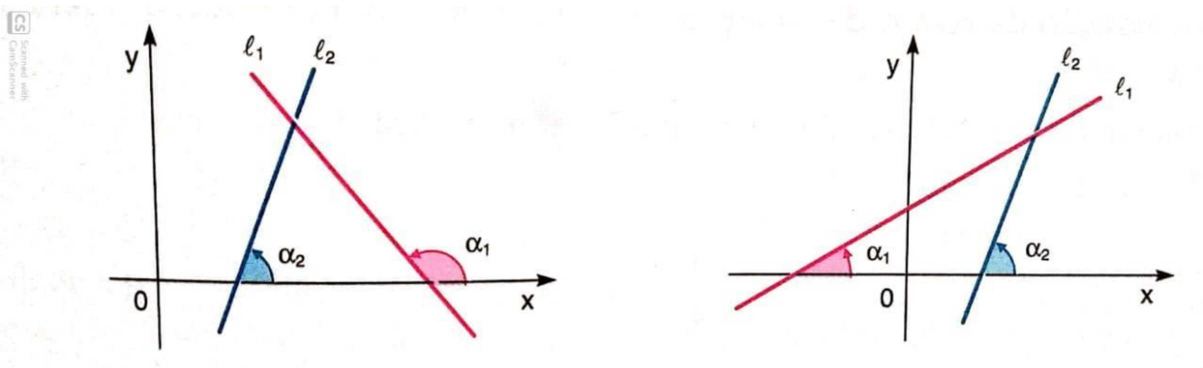
3° caso: $\alpha_1 \neq \alpha_2$

Supondo $\alpha_1 \neq 90°$ *e* $\alpha_2 \neq 90°$, temos:

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \rightarrow tg\alpha_1 \neq tg\alpha_2 \leftrightarrow m_1 \neq m_2$$

Nesse caso, as retas l_1 e l_2 são concorrentes $(l_1 \times l_2)$.

Figura 27 - Retas Concorrentes

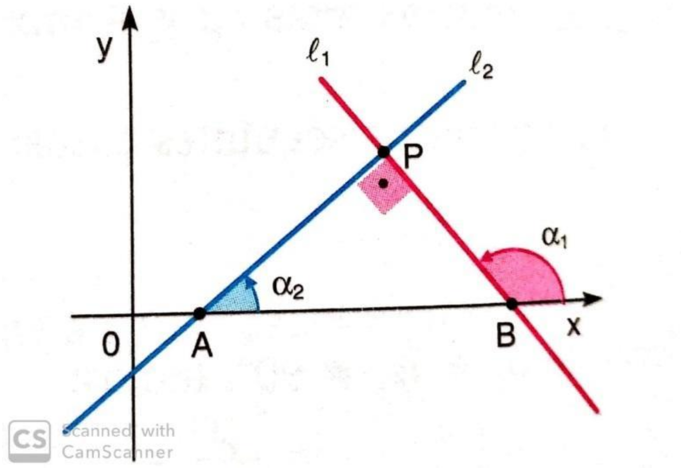


Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

Vejamos a condição particular em que as retas l_1 e l_2 são perpendiculares ($l_1 \perp l_2$).

Def. Duas retas l_1 e l_2 de coeficientes angulares m_1 e m_2, respectivamente, são perpendiculares se, e somente se, $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

Figura 28 - Retas Perpendiculares



Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

Atividade 06 (90 minutos)

Após, entregaremos aos alunos uma lista de exercícios para serem resolvidos na sala. Durante essa atividade auxiliaremos os alunos nos grupos. Anexo V.

Avaliação:

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio da participação e resolução de exercícios em sala e em casa.

Referências:

GIOVANNI, Jose Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **Matemática fundamental: uma nova abordagem**. São Paulo: Ftd, 2002.

LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões com a Matemática 3**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PROVA DO ENEM 2016. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/cad_5_prova_amarelo_12112016.pdf>. Acesso em: 29 mai. 2019.

2.4.3 Relatório de Observação 5

No dia 11 (onze) de junho de 2022, as 08:00, na Universidade Estadual do Oeste do Paraná, na sala A105, demos continuidade ao Projeto Promat 2022. O nosso grupo era formado pelos alunos, Ada Ramos, Leticia Toigo, Renan Pagliarine e Vinicius Vozniek. Os professores Amarildo e Felipe, são os professores orientadores, ambos estarão presentes em sala durante todo o projeto.

Iniciamos a aula resolvendo alguns exercícios da aula anterior, visando resgatar o conteúdo tratado para dar início ao próximo conteúdo. Em seguida, começamos o conteúdo dessa aula que se tratava de geometria analítica, analisando retas e suas posições. Começamos então explanando o conteúdo de pontos numa reta, analisando o coeficiente da reta e sua inclinação. Em seguida passamos alguns exercícios para que os alunos resolvessem e determinarem os coeficientes da reta.

Em seguida passamos uma atividade onde os alunos precisavam analisar um mapa e responder algumas perguntas sobre as posições relativas entre as ruas. Os alunos tiveram facilidade em achar as relações e tivemos bastante interação com os alunos.
Após o intervalo passamos um pouco sobre retas perpendiculares, concorrentes e reversas e ao final da aula entregamos uma lista de exercícios para os alunos resolverem.

2.4.6 Plano de Aula 6

PROMAT – 6º ENCONTRO

25/06/2022

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Levar os alunos a aprender conceitos básicos sobre circunferência.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com circunferência, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar equações de uma circunferência;
- Discutir posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências.

Conteúdo:

Circunferência.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lápis, computador, projetor, listas de exercícios.

Atividade 01 (30 minutos)

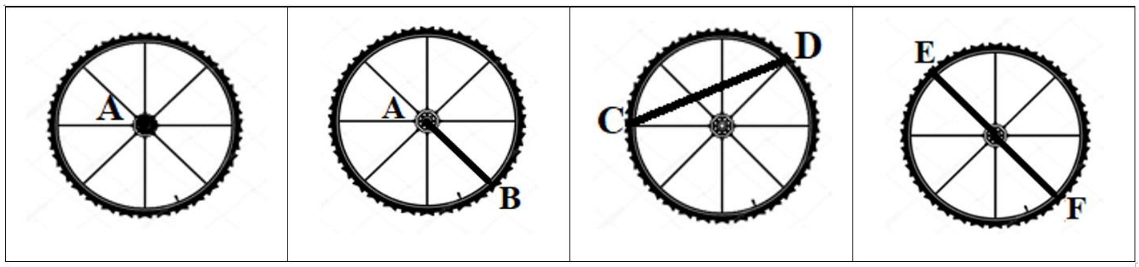
Iniciaremos a aula relembrando os conteúdos da aula anterior, realizando a correção de alguns dos exercícios propostos para serem feitos em casa.

Atividade 02 (30 minutos)

Em seguida, desenvolveremos a seguinte tarefa, destinando alguns minutos para que eles resolvam o problema.

Questão 1: Observe as imagens que representam rodas:

Figura 29 - Roda de bicicleta e conceitos relacionados à circunferência



Fonte: Adaptada de Depositphotos (2018).

a) Que forma geométrica podemos associar ao contorno da roda?

Resolução: A uma circunferência.

b) Como podemos chamar o ponto A?

Resolução: É um ponto fixo chamado de centro da circunferência.

c) Como chamamos o segmento $\overline{AB}$? E o segmento $\overline{CD}$? E o segmento $\overline{EF}$?

Resolução: O segmento $\overline{AB}$ é chamado de raio. O segmento $\overline{CD}$ é chamado de corda. O segmento $\overline{EF}$ é chamado de diâmetro da circunferência.

Posteriormente, corrigiremos as questões acima sanando as possíveis dúvidas e, com isso, definiremos os conceitos abordados.

Def.: **Circunferência** é o conjunto de todos os pontos de um plano que estão a uma mesma distância não nula de um ponto fixo, denominado centro.

Def.: Cada segmento de reta que une o centro da circunferência a um de seus pontos é chamado **raio (r)**.

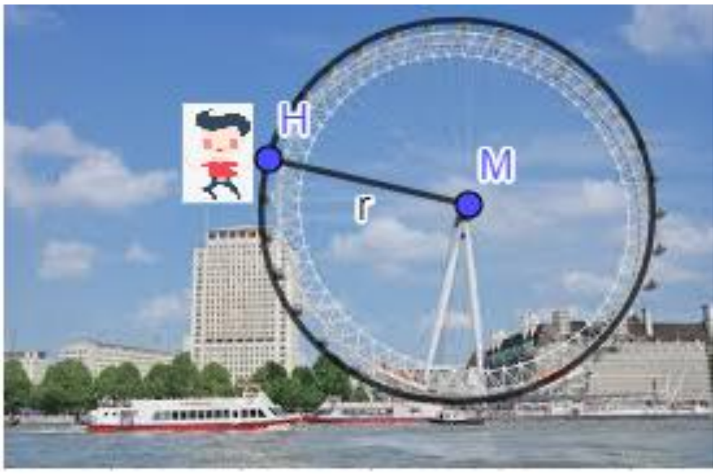
Def.: A **corda** é definida como segmento de reta que liga dois pontos pertencentes a uma circunferência.

Def.: O **diâmetro** fica definido como a maior corda que uma circunferência possui, ou, como a corda que passa pelo centro.

Após, apresentaremos a seguinte questão:

Questão 2: Pedro foi ao parque de diversões para brincar na Roda Gigante, conforme ilustra a Figura 2:

Figura 30 - Roda gigante



Fonte: Adaptada de Pxhere (2018).

Considere a imagem do brinquedo como a representação de uma circunferência. Sabendo que Pedro está localizado no ponto *H(x,y),* que o centro da circunferência é o ponto M(a,b) e que r é o raio da circunferência.

a) Determine a equação reduzida da circunferência.

Resolução: Vamos estabelecer uma relação para um ponto qualquer H(x,y) que pertence à circunferência de centro M(a,b) e raio r . O ponto H(x,y) pertence à circunferência se, e somente se, $d_{MH} = r$.

Relembraremos que a distância entre dois pontos é dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Logo,

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r.$$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos:

Formalização:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

A equação descrita acima é conhecida como equação reduzida da circunferência de centro C(a,b) e raio r. Enfatizaremos que o raio da circunferência é sempre maior que zero.

b) Suponha que r=3 e C(-2,1), determine a equação reduzida dessa circunferência.

Resolução: Tomando um ponto H (x,y) qualquer da circunferência, temos:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
$$[x-(-2)]^2+(y-1)^2=3^2$$
$$(x+2)^2+(y-1)^2=9.$$

Logo, $(x+2)^2+(y-1)^2=9$ *é a equação reduzida dessa circunferência.*

Questão 3: (PUC SP) O ponto $P(3,b)$ pertence à circunferência de centro no ponto $C(0,3)$ e raio 5. Calcule valor da coordenada b.

Resolução: Temos por $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$*, que a circunferência de centro* $C(0,3)$ *e raio* 5*, possui como representação a equação* $(x-0)^2+(y-3)^2=5^2$ *ou* $x^2+(y-3)^2=25$.

Considerando que o ponto P(3, b) pertença à circunferência, então:

$$x^2+(y-3)^2=25$$
$$3^2+(b-3)^2=25$$
$$9+(b-3)^2=25$$
$$(b-3)^2=25-9$$
$$(b-3)^2=16$$
$$b-3=4 \text{ ou } b-3=-4$$
$$b=4+3 \text{ ou } b=-4+3$$
$$b=7 \text{ ou } b=-1$$

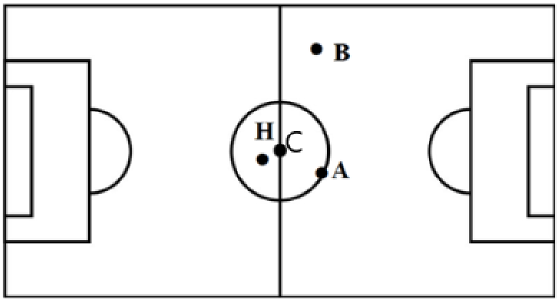
A coordenada b pode assumir os valores 7 ou –1.

Atividade 4 (20 minutos)

Para introduzir um novo tópico de conteúdo, vamos usar um problema que guiará o nosso estudo.

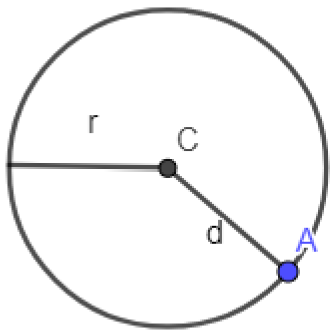
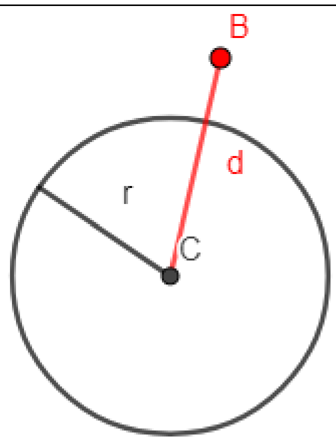
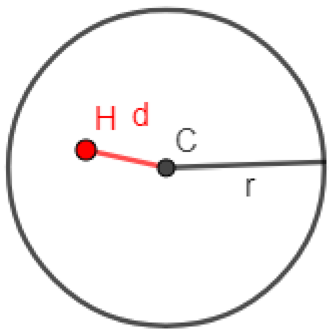
Tal conteúdo é a posição relativa de pontos em relação a circunferência.

Questão 4: (Questão baseada em Leonardo (2013)) Observe a imagem a seguir:



Os pontos *A*, *B* e *H* representam posições distintas de três jogadores de futebol em relação a circunferência do centro do campo de futebol. Analise a posição dos jogadores em relação a circunferência e observe a tabela abaixo.

Tabela 3 - Relação dos Pontos

$d = r$	$d > r$	$d < r$
 O ponto *A* pertence a circunferência.	 O ponto *B* é exterior à circunferência.	 O ponto *H* é interior à circunferência.

Fonte: Questão adaptada de Leonardo (2013).

Questão 5: (Questão adaptada de UFPB (2006) *apud* Leonardo (2013)) Considerando as seguintes proposições relativas à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no plano cartesiano, identifique a(s) verdadeira(s):

(01) O ponto $P(-1,1)$ é interior à circunferência.

(02) O ponto $P(-2,2)$ é exterior à circunferência.

(03) O ponto $P(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ está sobre a circunferência.

Qual é a soma das alternativas corretas?

Resolução: Primeiramente, precisamos descobrir qual é o centro e o raio da equação $x^2 + y^2 = 4$. *Para isso, vamos analisar os coeficientes, como segue*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

$$a = 0$$

$$b = 0$$

Portanto o centro da circunferência é $C(0,0)$.

E o raio é dado por

$$a^2 + b^2 - r^2 = -4 \quad \Rightarrow r^2 = 4 \quad \Rightarrow r = \sqrt{4} \quad \Rightarrow r = 2.$$

Então, vamos avaliar a alternativa (01). O ponto é interior à circunferência se a distância d do ponto ao centro da circunferência é menor que o raio r. A distância entre dois pontos $C(0,0)$ *e* $P(-1,1)$ *é dada por:*

$$d_{CP} = \sqrt{(-1-0)^2 + (1-0)^2}$$

$$d_{CP} = \sqrt{2}.$$

Portanto o $P(-1,1)$ *é interior à circunferência, pois* $\sqrt{2} < 2$.

Explicar que olhando a equação dá para fazer o desenho e ver se o ponto P está dentro.

Vamos avaliar (02). Um ponto é exterior à circunferência se a distância d do ponto ao centro da circunferência é maior que o raio r.

A distância entre dois pontos $C(0,0)$ *e* $P(-2,2)$ *é dada por:*

$$d_{CP} = \sqrt{(-2-0)^2 + (2-0)^2}$$

$$d_{CP} = \sqrt{8} \cong 2{,}82$$

Portanto o $P(-2,2)$ *é exterior à circunferência, pois* $\sqrt{8} > 2$.

Vamos avaliar a alternativa (03). Um ponto pertence a uma circunferência se a distância d é igual ao raio r ou se satisfaz a equação.

A distância entre dois pontos $C(0,0)$ *e* $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ *é dada por:*

$$d_{CP} = \sqrt{\left(-\sqrt{2}-0\right)^2 + (\sqrt{2}-0)^2}$$

$$d_{CP} = \sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad d_{CP} = 2.$$

Portanto, o ponto $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ *está sobre a circunferência, pois* $d = r$.

Também podemos verificar se o ponto $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ *satisfaz a equação* $x^2 + y^2 = 4$.

$$(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4.$$

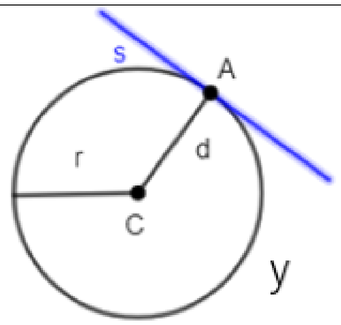
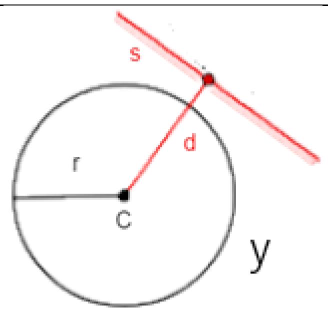
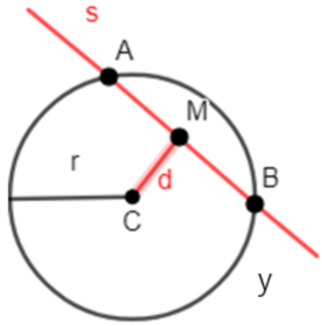
Portanto, o ponto $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ *está sobre a circunferência, pois* $d = r$.

Atividade 5 (10 minutos)

Após, iremos utilizar uma ilustração para introdução do novo tópico de estudo, baseando as explicações nesta. A saber, posição relativa de retas em relação a circunferência.

Questão 6: Dadas uma reta s e uma circunferência γ de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r, ambas no mesmo plano, há três casos possíveis para a posição relativa entre s e γ. Observe o quadro.

Tabela 4 - Posição relativa entre uma reta e uma circunferência

$d = r$	$d > r$	$d < r$
 s é tangente à circunferência.	 s é exterior à circunferência.	 s é secante à circunferência.

Fonte: Questão adaptada de Leonardo (2013).

Da observação dos três casos acima, sendo d a distância do ponto C à reta s, concluímos que:

- Se $d = r$, então $s \cap \gamma = \{A\}$ (s é tangente à circunferência γ);
- Se $d > r$, então $s \cap \gamma = \emptyset$ (s é exterior à circunferência γ);
- Se $d < r$, então $s \cap \gamma = \{A, B\}$ (s é secante à circunferência γ).

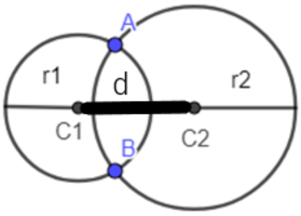
Observação: A escrita em vermelho não estará no material do aluno, os estudantes deverão preencher os espaços.

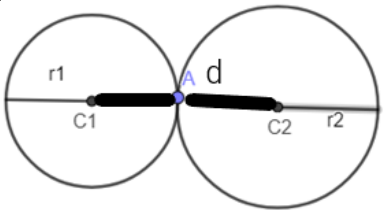
Atividade 6 (20 minutos)

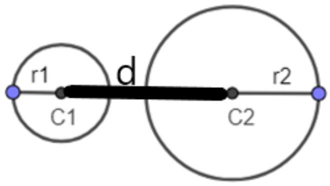
Vamos novamente utilizar de um exercício para introdução de conteúdo, neste caso, posição relativa entre circunferências.

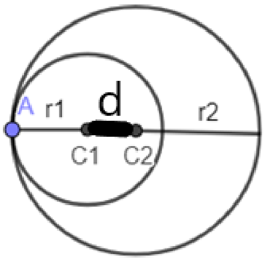
Questão 7: Dadas duas circunferências, em quantos pontos elas se interceptam?

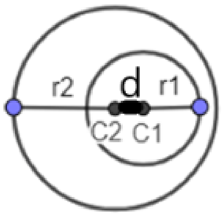
Tabela 5 - Posição relativa entre duas circunferências

<table>
<tr><td>Circunferências secantes.</td><td>Circunferências tangentes.</td><td>Circunferências disjuntas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">

$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$.</td><td>

Exteriores $d = r_1 + r_2$.</td><td>

Exteriores $d > r_1 + r_2$.</td></tr>
<tr><td>

Interiores $d = |r_1 - r_2|$.</td><td>

Interiores $0 \leq d < |r_1 - r_2|$.</td></tr>
<tr><td>Dois pontos em comum.</td><td>Um ponto em comum.</td><td>Nenhum ponto em comum.</td></tr>
</table>

Fonte: Questão adaptada de Leonardo (2013).

Ressaltaremos que, para saber quantos são os pontos comuns entre duas circunferências, basta saber seus raios e a distância entre seus centros. E, para saber quais são esses pontos, é preciso resolver o sistema formado pelas equações a elas associadas.

Questão 8: Verifique se as circunferências $x^2 + y^2 - 8x = 0$ e $x^2 + y^2 - 32x = 96$ possuem pontos comuns.

Resolução: Para saber se existem pontos em comuns vamos determinar os centros C_1 *e* C_2 *e os raios* r_1 *e* r_2 *de cada circunferência*

$$x^2 + y^2 - 8x = 0 \;\; (01).$$

A equação geral de uma circunferência é dada por:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

$$-2a = \; -8 \Rightarrow a = 4.$$

$$-2b = 0 \;\; \Rightarrow b = 0.$$

Portanto, o centro C_1 *da equação (01) é* $C_1(4{,}0)$.

O raio é $a^2 + b^2 - {r_1}^2 = 0 \Rightarrow 4^2 + 0^2 - {r_1}^2 = 0 \;\; \Rightarrow r_1 = 4$.

Da equação $x^2 + y^2 - 32x - 96 = 0$ *(02), temos*

$$-2a = -32 \;\; \Rightarrow a = 16.$$

$$-2b = 0 \;\; \Rightarrow b$$

Portanto, o centro C_2 *da equação (02) é* $C_2(16{,}0)$.

O raio é $a^2 + b^2 - {r_2}^2 = -96 \Rightarrow 16^2 + 0^2 - {r_2}^2 = -96 \Rightarrow -{r_2}^2 = -352 \Rightarrow r_2 \cong 18{,}76$.

Vamos calcular a distância d entre os centros:

$$d = \sqrt{(16-4)^2 + (0-0)^2} \Rightarrow \sqrt{12^2} = 12.$$

Logo, $0 \leq 12 < |4 - 18{,}76|$, *então,* $0 \leq 12 < 14{,}76$ *e as circunferências são disjuntas interiores e não possuem pontos em comum.*

Atividade 7 (60 minutos)

Após, entregaremos aos alunos uma lista de exercícios, Anexo VI, para serem resolvidos na sala. Durante essa atividade auxiliaremos os alunos nos grupos.

Avaliação

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio da participação, resolução de exercícios em sala e em casa.

Referências:

DEPOSITPHOTOS. **Ilustração em vetor roda de bicicleta.** Disponível em: https://pt.depositphotos.com/72672795/stock-illustration-bicycle-wheel-vector-illustration.html. Acesso em: 15 ago. 2019.

LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões com a Matemática**. Vol. 3. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PXHERE. **Roda gigante London Eye.** Disponível em: https://pxhere.com/pt/photo/887794. Acesso em: 15 ago. 2018.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia**. Vol.3. 1 ed. São Paulo: Scipione, 2010.

VECTORSTOCK. **Soccer field icon outline style vector image**. Disponível em: https://www.vectorstock.com/royalty-free-vector/soccer-field-icon-outline-style-vector-9531749. Acesso em: 15 ago. 2019.

Exercício equação reduzida da reta. Disponível em: <https://querobolsa.com.br/enem/matematica/equacao-da-circunferencia>. Acesso em 09 set. 2019.

2.4.7 Relatório de Observação 6

Mais uma vez, iniciamos a aula corrigindo os exercícios da lista deixada na aula anterior.

Após corrigirmos os exercícios, iniciamos a aula utilizando imagens de rodas de bicicleta para introduzir algumas definições de nomenclatura referentes a objetos geométricos que constituem uma circunferência. Em seguida, após introduzirmos os conceitos de uma maneira mais intuitiva, definimos todos novamente, mas de maneira mais formal.

Feito isso, utilizamos a ideia de distância apresentada na aula anterior, sobre plano cartesiano, que foi disponibilizada via vídeo, para encontrar a equação de uma circunferência. Em seguida, propomos um exercício para os alunos envolvendo a equação da circunferência.

Prosseguimos a aula utilizando um problema de determinar a posição de relativa de pontos em relação a uma circunferência, para classificarmos pontos em uma relação com uma circunferência dada. Eles são pontos interiores, exteriores e pertencentes à circunferência.

Por fim, definimos as posições relativas entre retas e circunferências e entre duas circunferências.

Ao final, no tempo restante de aula, deixamos uma lista com exercícios para os alunos resolverem. Enquanto eles resolviam, nós professores auxiliamos os alunos em dúvidas. Eles se mostraram bastante interessados, uma vez que todos pretendem prestar vestibular.

2.5 ANÁLISE COMBINATÓRIA

2.5.1 Plano de Aula 7

PROMAT – 7º ENCONTRO

ASSÍNCRONO

Público-Alvo:

Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Uma aula gravada com duração de 30 minutos.

Objetivo Geral:

Que os alunos compreendam o princípio fundamental da contagem (PFC).

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com o PFC, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Aplicar as técnicas de contagem aprendidas na resolução de problemas.

Conteúdo:

Análise combinatória – Princípio Fundamental da Contagem.

Recursos Didáticos:

Aula expositiva, em sistema de streaming utilizando o Google Meet, em gravação, a ser cedida aos alunos.

Atividade 01 (10 minutos)

Inicialmente, serão propostos exercícios para que os alunos resolvam através de métodos próprios. Neste momento será proposto que, mesmo que os alunos sejam capazes de resolver os problemas mentalmente, procurem “criar” ou se utilizar de representações (ou símbolos), na medida do possível, na resolução desses problemas. Esta parte servirá para que os alunos percebam que os princípios que, em certo sentido, regulamentam ou fundamentam a resolução de questões de contagem, na verdade são apenas uma espécie de "algoritmização" de processos mentais e lógicos que eles já possuem, e que procuram apenas identificar o que há de essencial nesses processos e como eles podem ser enxugados de modo a abrangerem, se não todos, ao menos a maioria dos problemas para os quais esses processos são indispensáveis.

Questão 1: Para realizar viagens entre Curitiba (PR) e São Paulo (SP), dispõe-se de 3 companhias diferentes de aviação e 4 empresas de ônibus. De quantas maneiras é possível realizar essa viagem?

Resolução: $3 + 4 = 7$

Questão 2: Numa lanchonete há 4 sabores de doces e 7 sabores de salgados. Suponha que se queira comer um doce ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que se podem fazer?

Resolução: $4 + 7 = 11$

Questão 3: Com o código Morse é possível codificar as letras de um alfabeto qualquer através de uma sequência de símbolos contendo de 1 a 4 caracteres, sendo que esses símbolos do "alfabeto" Morse são dois:

$$\text{"}\bullet\text{" (lê-se ponto) e "}-\text{" (lê-se traço)}$$

Sabendo disso, quantas letras podem ser codificadas utilizando o código Morse?

Resolução: 4 letras: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ *palavras, 3 letras:* $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ *palavras, 2 letras:* $2 \cdot 2 = 4$ *palavras, 1 letra: 2 palavras. Resultado:* $16 + 8 + 4 + 2 = 30$ *palavras*

Nesta primeira atividade, espera-se que os alunos pausem o vídeo a cada questão e tentem resolver os problemas. Após a apresentação de uma questão, esta será resolvida antes de apresentarmos a próxima, até que as três questões sejam resolvidas.

Apresentação dos Princípios da Aditivo e Multiplicativo (10 minutos):

Neste momento, serão apresentados os princípios que já foram, pelo menos é o que se espera, utilizados na resolução das três questões propostas inicialmente.

Def. **Princípio Aditivo:** *Se A e B são dois conjuntos distintos, com p e q elementos respectivamente, então a união dos conjuntos A e B possui* $p + q$ *elementos.*

Def. **Princípio Multiplicativo:** *Se uma decisão* $d1$ *pode ser tomada de* x *maneiras e se, uma vez tomada a decisão* $d1$*, a decisão* $d2$ *puder ser tomada de* y *maneiras, então o número de maneiras possíveis de se tomarem as decisões* $d1$ *e* $d2$ *é*

$$x \times y$$

E, além disso, uma recomendação final:

Se uma decisão é mais complicada que as demais, ela deve ser tomada em primeiro lugar.

Neste momento pediremos aos alunos que tentem identificar em suas soluções, dos três primeiros problemas, o uso implícito dos princípios aditivo e multiplicativo.

Resolução de exercícios na sequência do vídeo (10 minutos):

Usaremos o tempo restante da aula para resolver alguns exercícios exemplificando o uso dos princípios aditivo e multiplicativo conforme anexo.

1. (Morgado, 2001) De um baralho comum (52 cartas) sacam-se sucessivamente e sem reposição três cartas. Quantas são as extrações nas quais a primeira carta é de copas, a segunda é um rei e a terceira não é uma dama?

   Resolução: *existem 13 cartas de copas, 4 reis e 4 damas. Como a terceira NÃO é uma dama, então são 52 - 4 = 48 cartas possíveis para a terceira sacada. Porém, precisamos considerar que duas cartas já foram retiradas do baralho. Obviamente a segunda sacada não é uma dama, então isso reduz para 47 o número de cartas possíveis para o terceiro saque. No entanto, considerando que, no primeiro saque, em um caso a carta é uma dama e no restante não, precisamos dividir nossa contagem em duas etapas:*

   Na 1ª etapa, consideramos os casos em que o primeiro saque não é uma dama. Neste caso, o número de opções na terceira extração cai para 46, e o número de extrações com as características dadas é

$$12 \times 4 \times 46 = 2\,208$$

   Na 2ª etapa consideramos o caso em que o primeiro saque é uma dama. Neste caso, o número de extrações possíveis é

$$1 \times 4 \times 47 = 188$$

   Somando-se os dois casos obtemos um total de 2 396 extrações possíveis com as configurações dadas!

   Veja que escolhemos primeiro tomar a "decisão" de escolher as cartas do primeiro saque e separá-las em dois grupos, visto que este saque especificamente poderia interferir ou não no terceiro caso, o que foi entendido como uma situação mais complicada que as demais.

   Este exemplo nos mostra o porquê de os princípios fundamentais da contagem serem chamados de princípios, isto é, porque eles quase sempre precisam se adaptar ao problema de contagem que se quer resolver.

2. Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla-escolha, com cinco alternativas por questão?

   Resolução: *cada questão é uma decisão que pode ser tomada de 5 maneiras distintas. Assim, podemos aplicar diretamente o princípio multiplicativo obtendo*

$$5 \times 5 \times \cdots \times 5 = 10 \times 5 = 50$$

   Logo, o número de gabaritos possíveis é 50.

3. As placas dos automóveis são formadas por duas letras (K, Y e W inclusive) seguidas por quatro algarismos numéricos. Quantas placas podem ser formadas?

   Resolução: *Cada letra pode ser escolhida de 26 modos e cada algarismo de 10 modos distintos. A resposta é* $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 6\,760\,000$

Avaliação:

Será tomada, na aula conseguinte, os exercícios passados em vídeo resolvendo-os novamente com auxílio dos alunos.

Referências:

CALSSAVARA, C. R. (Coord.). **PROMAT**. Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Primeira Fase e Segunda Fase. Projeto de Ensino. Cascavel:

UNIOESTE/CCET/Colegiado de Matemática, 2º Semestre de 2011. (Documento não publicado).

MORGADO, Augusto César; et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, 2001, 6ª ed.

Só Exercícios. https://soexercicios.com.br/plataforma/busca-de-exercicios-vestibular, acesso em: 05/04/2022.

2.5.2 Plano de Aula 8

PROMAT – 8º ENCONTRO

02/07/2022

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender os conceitos de Análise Combinatória: permutações, arranjo e combinação.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Análise Combinatória, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender os métodos de resolução de problemas de combinações simples;
- Conceituar, diferenciar e aplicar operações básicas, utilizando Arranjo, Combinação e Permutação;

Conteúdo:

- Análise Combinatória - Arranjo, Combinação e Permutação.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lápis, computador, projetor.

Encaminhamento metodológico:

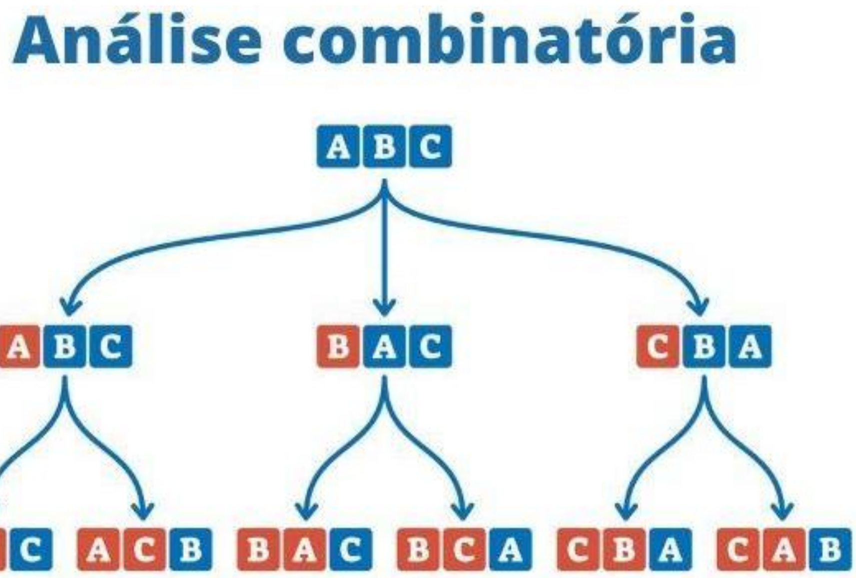
Iniciaremos a aula dialogando com os alunos e explicando sobre os principais usos da análise combinatória, que é a tomada de decisões.

A análise combinatória possui várias aplicações, como na probabilidade e estatística, e essas três áreas auxiliam de forma direta as tomadas de decisões.

Um exemplo bastante presente se dá na análise das contaminações em uma pandemia e na estimativa das futuras contaminações. A análise combinatória está presente também no estudo da genética ou até mesmo no nosso CPF, que é único em território nacional, além de senhas e sistemas de segurança, que analisam as combinações possíveis para maior proteção.

Na análise combinatória busca-se resolver problemas sobre a possibilidade de construir arranjos de objetos para satisfazer condições específicas.

Figura 31 - Análise Combinatória



Disponível em <https://www.preparaenem.com/matematica/analise-combinatoria.htm>

Acesso em 09 de abril de 2022

Os três tipos principais de agrupamentos são o arranjo, a permutação e a combinação. Para esta aula, o objetivo é trabalhar os agrupamentos em sua forma mais simples.

Na aula disponibilizada, havia a explicação do Princípio Fundamental da Contagem, conhecido como princípio multiplicativo, é a base para os cálculos envolvendo contagem de reagrupamentos.

Nesse momento, brevemente, lembraremos da aula anterior mostrando alguns exemplos de problemas utilizando o PFC, bem como o cálculo de fatorial, que será importante para o desenvolvimento restante da aula.

Dessa forma, explicaremos os conceitos de agrupamentos seguido de exercícios para a fixação.

Def. **Fatorial de um número:** O fatorial de um número m, denotado por $m!$, é definido de modo recursivo por:

$$(m+1)! = (m+1)m!\,, 0! = 1$$

Também podemos escrever o fatorial de m, como:

$$m! = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(3)(2)1$$

Embora zero não seja um número natural no sentido que tenha tido origem nas coisas da natureza, procura-se dar sentido para a definição de fatorial de m de uma forma mais ampla, incluindo $m = 0$.

Tipos de agrupamentos: Existem problemas que são resolvidos pela aplicação do princípio multiplicativo, entretanto, em muitos casos, convém analisar mais a fundo, a fim de aplicar uma fórmula específica ao problema de acordo com o tipo de agrupamento que estamos resolvendo.

Existem três tipos de agrupamento que são igualmente importantes, são eles a permutação, a combinação e o arranjo. Compreender as características de cada um é essencial para resolver situações-problemas que envolvam qualquer um deles.

Def. **Permutação:** dado um conjunto com n elementos, chamamos de permutação todos os agrupamentos ordenados formados com esses n elementos, por exemplo, em situações envolvendo filas, em que queremos saber de quantas maneiras uma fila pode ser organizada, em problemas envolvendo anagramas, entre outros.

Para diferenciar a permutação da combinação e do arranjo, é importante entender, na permutação, que a ordem dos elementos é importante e que todos os elementos do conjunto farão parte desses reordenamentos.

Para calcular a permutação de n elementos, utilizamos a fórmula:

$$P_n = n!$$

Exemplo 1: De quantas maneiras 6 pessoas podem se organizar em uma fila?

Resolução:

Pelo princípio multiplicativo, sabemos que 6 decisões serão tomadas.

Sabemos que há 6 possibilidades para a primeira pessoa, 5 possibilidades para a segunda pessoa, 4 possibilidades para a terceira pessoa, 3 possibilidades para a quarta pessoa, 2 para a quinta pessoa, e, por fim, 1 possibilidade para a última, mas perceba que, ao multiplicar as decisões, estamos calculando nada mais que 6!, sendo assim, sabemos que:

$$P_6 = 6! = 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 720$$

Def. **Arranjo:** um agrupamento é conhecido como arranjo quando selecionamos parte dos elementos dentro de um conjunto. Seja n a quantidade de elementos de um conjunto. O cálculo do arranjo é a quantidade de agrupamentos ordenados que conseguimos formar com p elementos desse conjunto, em que $n > p$.

Assim, temos a seguinte fórmula:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Lê-se: arranjo de n elementos tomados de p em p.

Exemplo 2: Com 10 atletas disputando uma corrida de 100 metros rasos, de quantas maneiras distintas podemos ter o pódio, supondo que os atletas sejam igualmente qualificados e sabendo que ele é formado pelo primeiro, segundo e terceiro lugares?

Resolução:

$$A_{10,3} = \frac{10!}{10 - 3!}$$

$$A_{10,3} = \frac{10!}{7!}$$

$$A_{10,3} = \frac{10 * 9 * 8 * 7!}{7!}$$

$$A_{10,3} = 10 * 9 * 8 = 720$$

Def. **Combinação: c**alcular as combinações possíveis é contar quantos subconjuntos podemos formar com parte dos elementos do conjunto. Diferentemente do arranjo e da permutação, na combinação, a ordem não é importante, então, o conjunto não é ordenado. Para calcular a combinação, utilizamos a fórmula:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n - p)!}$$

Exemplo 3: Para comemorar o sucesso em vendas de uma corretora de imóveis, a empresa decidiu sortear, entre os 10 funcionários que mais venderam, 4 deles para viajarem para a cidade de Caldas Novas-GO, com a sua família e todas as despesas pagas. Quantos resultados distintos podemos ter com esse sorteio?

Resolução:

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4!\,(10 - 3)!}$$

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4!\,7!}$$

$$C_{10,4} = \frac{10 * 9 * 8}{4 * 3 * 2 * 1}$$

$$C_{10,4} = \frac{720}{24} = 30$$

Atividade 01 (2 horas)

Aplicaremos aos alunos algumas atividades para resolução em sala de aula, buscando explanar, nas resoluções, novamente os conteúdos, para fixação.

1. **ENEM (2009) -** Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram

sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.

A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
d) duas combinações.
e) dois arranjos.

Resolução: Problemas nos quais são escolhidos alguns elementos dentre um grupo, trata-se de arranjo ou combinação, caso a ordem de escolha importe, trata-se de arranjo; caso a ordem de escolha não importe, combinação.

Problemas de permutação ocorrem quando os elementos já estão previamente definidos e deve ser calculado o número de maneiras de ordená-los. Serão escolhidos 4 times dentre 12 times para definir o grupo A, como a ordem de escolha não importa, trata-se de uma combinação. Para o jogo de abertura, devem ser escolhidos dois dentre os quatro times que formam o grupo A, sendo que o primeiro joga em seu próprio campo e o segundo como visitante, logo a ordem de escolha importa, trata-se de um arranjo.

2. **ENEM (2017)** - Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *videogame*. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores.

O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

Resolução: essa é uma questão de Análise Combinatória onde a interpretação da questão nos levará a utilizar a fórmula das combinações ou arranjos. Como os jogadores jogam todos entre si, não faz diferença se a partida for (Jogador 1) X (Jogador 2) ou (Jogador 2) x (Jogador 1). Logo, temos que usar a fórmula das Combinações, e não de Arranjos.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!}$$

$$C_{8,2} = \frac{8*7*6!}{2*6!} = \frac{56}{2} = 28$$

3. **ENEM (2012)** - O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido. Todos os alunos decidiram participar. A cada vez, um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

   O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há

a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

Resolução: alternativa A

Pelo princípio fundamental da contagem, sabemos que o número de respostas distintas é calculado pelo produto $5*6*9 = 270$. *Como há 280 alunos, então, temos 10 alunos a mais que possíveis respostas distintas.*

Avaliação:

Alunos serão avaliados pelas resoluções dos exercícios da Lista 6, Anexo VI.

Referências:

CALSSAVARA, C. R. (Coord.). **PROMAT**. Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Primeira Fase e Segunda Fase. Projeto de Ensino. Cascavel:

UNIOESTE/CCET/Colegiado de Matemática, 2º Semestre de 2011. (Documento não publicado).

MORGADO, Augusto César; et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, 2001, 6ª ed.

Só Exercícios. https://soexercicios.com.br/plataforma/busca-de-exercicios-vestibular, acesso em: 05/04/2022.

2.5.3 Relatório de Observação 8

No dia 02 (dois) de julho de 2022, as 08:00, na Universidade Estadual do Oeste do Paraná, na sala A105, demos continuidade ao Projeto Promat 2022. O nosso grupo era formado pelos alunos, Ada Ramos, Leticia Toigo, Renan Pagliarine e Vinicius Vozniek. Os professores Amarildo e Felipe, são os professores orientadores.

Iniciamos a aula resolvendo alguns exercícios da aula anterior, visando resgatar o conteúdo tratado para dar início ao próximo conteúdo. Em seguida, começamos o conteúdo dessa aula que se tratava de análise combinatória, analisando e definindo Permutação, Arranjo, Combinação e ademais. Foram utilizadas analogias ao mundo cotidiano para que os alunos conseguissem trazer até mesmo exemplos de caso. Em seguida passamos alguns exercícios para que os alunos resolvessem e determinarem os coeficientes da reta. Passamos ainda uma atividade onde os alunos precisavam resolver as questões buscando as informações anotadas e com auxílio nosso na correção.

2.5.4 Plano de Aula 9

PROMAT – 9º ENCONTRO

09/07/2022

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender os conceitos de Probabilidade.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Probabilidade, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Interpretar e resolver problemas expostos;
- Compreender a importância do cálculo de probabilidades;

Conteúdo:

Probabilidade.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lápis, computador, projetor.

Encaminhamento metodológico:

A introdução é feita em sala de aula, uma conversa informal é iniciada com o objetivo de colher dos alunos exemplos da utilização, aplicação e importância da probabilidade. Alguns exemplos são citados e outros são estimulados a serem citados pelos próprios alunos.

Seguindo a conversa sobre Probabilidade, slides serão exibidos, sobre ser muito comum no tratamento da informação, aparecerem frases que indiquem a chance ou a probabilidade de algo ocorrer, como:

1- Quem possui pelo menos três amigos no trabalho tem 46% mais chance de estar extremamente satisfeito com seu emprego.
2- A probabilidade de uma mulher ter um filho com Síndrome de Down aumenta conforme a idade.
3- A possibilidade de sobreviver a uma queda livre de um avião a 5 mil metros é a mesma que cair do quinquagésimo andar de um edifício de 150 m de altura.
4- A possibilidade de uma pessoa ultrapassar 115 anos de idade é de 1 em 2 bilhões

Em seguida, será contado uma breve história sobre o surgimento da Teoria das Probabilidades.

Vários são os fatos históricos relatados que deram início ao surgimento e uso das probabilidades, cada qual dando ênfase ao enfoque filosófico de seu interesse. O contexto inicial que apresento é baseado na teoria que apresenta o crescimento da ciência e da tecnologia a partir da situação do mercado, ou seja, das necessidades econômicas. No decorrer desta aula vamos verificar outras leituras sobre a história das probabilidades que só vem acrescentar à contextualização do tema.

O uso de probabilidades teve início por volta do século XVII onde se iniciaram, devido ao roubo e naufrágio de cargas, o pagamento de seguros e anuidades. Os comerciantes mesopotâmicos e fenícios pagavam os seguros para não terem prejuízos com as cargas roubadas ou naufragadas.

Os gregos e os romanos prosseguiram com tal atitude e os comerciantes italianos, que já navegavam no mundo moderno, perpetuaram as estratégias usadas pelas primeiras seguradoras. Pouco se sabe sobre as técnicas de cálculo utilizadas para determinar os valores a serem pagos, mas sabemos que se baseavam nas probabilidades de ocorrência dos acidentes, roubos ou naufrágios.

Se considerarmos o momento histórico do desenvolvimento da Ciência dos dados e dos experimentos biológicos, que utilizavam Estatística e Probabilidade teremos o surgimento da Probabilidade apenas no século XIX. Já se levarmos em conta o desenvolvimento das teorias de medição, que somente surgiram no século XVIII, poderemos até argumentar que antes do século XVII a teoria das Probabilidades ainda não era aplicada.

Após uma breve conversa, iremos propor umas atividades lúdicas aos alunos.

Questão 1: Desafio aos alunos a responderem às seguintes questões:

Tenho aqui uma moeda. Se jogá-la para o alto qual a chance de sair coroa?

- Peça a um dos alunos que respondeu à questão que relate como pensou.
- Interrogue os alunos até que eles cheguem a uma conclusão que relacione o todo (100%) e as partes (50%).
- Quais as chances de ao lançar o dado se obter um número maior que 4?

A partir dessas indagações construídas a partir do conhecimento prévio dos alunos apresentaremos no quadro-de-giz o conceito fundamental para o cálculo com probabilidades.

Se em um fato aleatório as possibilidades são igualmente aceitáveis, então a probabilidade de ocorrer um evento A é:

$$P(A) = números\ de\ casos\,\frac{favoraveis}{possíveis}$$

Teríamos então:

A) no caso do lançamento da moeda: 1/2 = 50%

B) no caso do lançamento dos dados (número maior que 4): 2/6 = 33%

Posterior a essa breve introdução será utilizado um jogo afim de introduzir o conteúdo de probabilidade.

Questão 2: Proposta pedagógica para o ensino de probabilidade através do bingo. Compreendemos que este jogo ao ser utilizado para introduzir o conceito de probabilidade é um excelente recurso, principalmente por se tratar de um jogo de azar onde poderemos começar com a ideia de chances de se vencer o jogo que é a parte inicial da probabilidade.

Regras do Jogo: O jogo do bingo já é bastante conhecido e ainda hoje muito utilizado em casas de jogos e para sorteios, utilizado como uma atividade de lazer. As suas regras são básicas e claras. O jogo é constituído por uma quantidade finita de números. Neste caso utilizaremos 30 números, pois é a quantidade presente no jogo tradicional. Estes ficam dentro de algum recipiente a fim se ser sorteados. Os participantes do jogo recebem cada um, uma cartela enumerada com 10 números, porém números aleatórios. Também são distribuídos algum tipo de material, normalmente sementes, para se marcar os números sorteados contidos em sua cartela. Vence o jogador que a partir dos sorteios for o primeiro a completar todos os números da cartela. É essencial que as cartelas sejam levadas já impressas a fim de se obter mais tempo na aplicação do jogo.

Para a aplicação deste jogo, pensamos em uma pequena modificação das cores nos números sorteados. Normalmente o jogo do bingo traz somente peças de uma única cor, porém nesta nova roupagem utilizaremos 15 peças brancas e 15 peças pretas dentro da urna enumeradas da mesma forma de 1 a 30 a fim de trabalhar questões de contagem em probabilidade.

Objetivos: Ensinar ao aluno experimento aleatório, espaço amostral, evento e probabilidade através do bingo, além de construir o conceito de probabilidade com a participação da turma.

Metodologia: Será dividida a turma em grupos. O trabalho em grupo é sempre algo interessante, e pode ser adotado tanto em jogos ou sem ser com jogos. Essa estratégia possibilita ao aluno se aproximar dos seus colegas e mesmo que tenha assuntos paralelos, ele se sentirá mais confiante em analisar fatores do jogo.

Em primeiro momento o professor distribuirá as cartelas para os alunos e explicará as regras básicas do bingo para se iniciar a partida. Antes que se inicie o professor deve começar um diálogo sobre quem na sala tem mais chances de ganhar. Isso possivelmente deixará a turma agitada, mas é importante que o professor ouça as respostas e explique que as chances são iguais para todos os jogadores, visto que as cartelas possuem a mesma quantidade de números e foram distribuídas aleatoriamente.

Então já que as chances são as mesmas o professor lança uma pergunta sobre qual é a chance de cada aluno vencer a partida. Para a resposta o professor deve conscientizar a turma de que cada aluno tem uma chance de vencer. Assim o que ele quer é vencer a partida, mas contra ele está o restante da turma que também pode vencer. Então por exemplo em uma turma de vinte alunos, João tem uma chance de ganhar num total de 20 alunos, onde todos a princípio têm a mesma chance de ganhar.

Para se formar a ideia de quociente entre os resultados obtidos usaremos a mesma ideia de fração, pensando em uma barra de chocolate. Uma barra de chocolate é inteira, ou seja, 1, se quisermos metade da barra teremos que dividir ela ao meio e pegar apenas um pedaço ou seja 1 pedaço de 2 que é igual a metade da barra e consecutivamente 0,5. Sendo assim $0{,}5 = \frac{1}{2}$. Desta mesma forma a chance de João vencer é $\frac{1}{10} = 0{,}05$.

A fim de alcançarmos o primeiro objetivo, agora que os alunos já sabem as chances que eles têm de vencer, o professor irá conceituar casos favoráveis como sendo aquele número que te favorecerá, ou seja, o número que você quer e casos possíveis como sendo o total de pessoas que poderá vencer a partida.

Agora que eles já conhecem casos favoráveis e casos possíveis, basta o professor dizer que para descobrir a probabilidade de se vencer no jogo basta realizar o quociente entre casos favoráveis e casos possíveis. Tendo feito isso o professor realizará a primeira rodada no bingo e observará quem ou se marcaram pontos. Se tiverem pessoas pontuando então ele irá perguntar:

Questão 3: Os alunos que marcaram na primeira rodada, teriam mais chances de acertar o próximo número do que os demais alunos da sala?

O professor deve deixá-los responder ao seu modo e em seguida falar sobre como a probabilidade pode dar essa precisão na resposta e introduzir o conceito de probabilidade para que eles façam os cálculos da seguinte maneira:

Resolução: *A questão nos pede para calcularmos a probabilidade tanto do Aluno 1 quanto do aluno 2 pontuar na próxima rodada, se considerarmos aluno 1 aqueles que acertaram ponto na primeira rodada e Aluno 2 aqueles que não marcaram pontos na primeira rodada.*

Para esse cálculo já sabemos que precisamos identificar o número de casos favoráveis, que são aqueles que farão o aluno pontuar na segunda rodada e o número de casos possíveis, que é o total de números que podem ser sorteados. Então teremos:

Aluno 1 - *Casos favoráveis = 9*

Casos possíveis = 29

Probabilidade = $CASOS\frac{FAVORÁVEIS}{POSSÍVEIS} = \frac{9}{29} = 0{,}3103 = 31{,}03\%$

Aluno 2 - *Casos favoráveis = 10*

Casos possíveis = 29

Probabilidade = $CASOS\frac{FAVORÁVEIS}{POSSÍVEIS} = \frac{10}{29}$

O professor irá introduzir neste momento a ideia de porcentagem, dizendo que não é muito elegante que uma resposta fique em forma de fração ao falarmos de probabilidade. Então para transformarmos essas frações em porcentagem, a palavra já remete ao seu significado: Por cento.

Então iremos calcular o número que multiplicado pelo denominador nos resultaria em 100. Ao acharmos esse resultado o multiplicamos pelo numerador da seguinte maneira para o aluno um: $\frac{9}{29} = \frac{31{,}03}{100} = 31{,}03\%$ e para o aluno dois: $\frac{10}{29} = \frac{34{,}48}{100} = 34{,}48\%$.

Desta maneira concluímos que os jogadores que não marcaram na primeira rodada têm mais chances de marcar pontos na segunda rodada. Cabe ao professor esclarecer aos alunos que quanto menor o número em sua cartela também será menor o número de chances de se pontuar, ainda que exista. Agora que o aluno já compreende a ideia de como se calcular a probabilidade para atingir o segundo objetivo específico o professor irá fazer um paralelo entre o bingo e conceitos probabilísticos a começar falando que ao realizar o sorteio sempre obteremos resultados diferentes.

Então o bingo é um experimento aleatório visto que quando repetido em iguais condições, podem fornecer resultados diferentes. Sendo assim, qualquer situação em que ao realizar o mesmo experimento conseguimos resultados distintos denominamos experimento aleatório.

Em seguida definirá espaço amostral como sendo o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, mais conhecido pelos alunos até o momento como casos possíveis. Então o professor deve explicar para os alunos que neste experimento aleatório, o jogo do bingo, o nosso espaço amostral contém 30 elementos. Representaremos o espaço amostral pela letra S, então: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 29, 30\}$.

Os casos favoráveis estudados até agora que é aquilo que você quer em uma situação, será definido como evento. O evento é um conjunto de resultados (Subconjunto do espaço amostral). Por exemplo, podemos definir um evento C dos números pares no bingo, desta forma teremos: $C = \{2, \ldots, 8, \ldots, 30\}$.

O professor deve esclarecer também que cada sorteio no bingo é um evento com apenas um elemento.

Então para formalizar o que o professor já passou para a turma até neste momento ele definirá a probabilidade como dada pelas possibilidades de um evento ocorrer levando em consideração que o seu espaço amostral seja finito, formada pelo número de elementos do evento (numerador) sobre o número de elementos do espaço amostral (denominador).

Considere os seguintes elementos:

E é um evento.

- n(E) é o número de elementos do evento.
- S é espaço amostral.
- n(S) é a quantidade de elementos do espaço amostral.

Então a probabilidade do evento E ocorrer são: $p(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

É muito importante que após o professor definir esses conceitos ele passe a adotar a linguagem matemática mesmo no decorrer do jogo. Frases como: O evento sorteado foi... , retirei do espaço amostral... , são frases que estimularão os alunos a começar a pensar em probabilidade.

Agora que o professor já ofereceu a fórmula os alunos estarão prontos para o terceiro objetivo específico que o levará a realizar cálculos mais elaborados, caso contrário os alunos podem começar a se sentir desinteressados.

Então é neste terceiro momento que utilizaremos algumas ideias de eventos independentes simultâneos para a realização dos cálculos.

A cada rodada do bingo, podem ser feitas novas perguntas envolvendo probabilidade aos alunos. É claro que ao realizar estas perguntas não podemos esperar que eles respondam com linguagem matemática, utilizarão uma linguagem um pouco mais informal para relatar o que o jogo está lhes mostrando. Mas na medida em que for se desenrolando o jogo é necessário que o professor corrija a linguagem utilizada para fins de aprimoramento no conteúdo. Isto é útil, pois os alunos se sentirão participantes desta construção. Sugerimos algumas questões a serem utilizadas:

Questão 4: Qual a chance de uma cartela vazia ter um número contemplado no próximo sorteio, dado que o bingo já teve três números sorteados?

Resolução: Três números já foram sorteados não pertencendo mais ao espaço amostral. Então Espaço amostral: $n(S) = 27$

A quantidade de números em cada cartela é 10, e visto que ele não preencheu nenhum número usaremos o número total. Então Evento: $n(E) = 10$

Desta forma: $0{,}3703 = 37{,}03\%$

Então a chance de uma cartela vazia ser preenchida na próxima rodada é $25{,}77\%$.

Questão 5: Qual é a probabilidade de acertar 2 bolas nas primeiras 2 rodadas?

Resolução: A probabilidade de se acertar uma bola na primeira rodada é: $p(E) = \frac{10}{30} = 0{,}333\ldots = 33{,}33\%$. *Já na segunda rodada, dado que acertou a primeira essa chance é:* $p(E) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\%$.

Como nessa questão é pedido que calculasse a probabilidade dos dois eventos acontecerem, ou seja, um e o outro então o professor explicará que iremos utilizar a multiplicação para obter esse resultado. Então: $p(E) = \frac{10}{30} * \frac{3}{10} = 0{,}1 = 10\%$.

É provável que algum aluno diga que é mais difícil, por acontecer raramente. Porém mesmo que seja bem pequena essa chance existe sim, e o professor deve estimular a sua turma a realizar os cálculos. Como não são números inteiros, não vejo problemas em se usar a calculadora nesta aula. O mais importante é que o aluno entenda como a probabilidade é calculada.

Questão 6: Qual a probabilidade de ser sorteada uma bola branca na sexta rodada se nas 5 primeiras rodadas foram sorteadas bolas pretas?

Resolução: Na sexta rodada possuem apenas 25 bolas na urna sendo que das 25 bolas, 15 são brancas e 10 são pretas. Desta forma nosso $n(S) = 25$ *e* $n(E) = 15$

Então: $p(E) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$

Questão 7: Qual a probabilidade de na primeira rodada ser sorteado um número par e a bola preta?

Resolução: Para bola preta temos:$n(E) = 15$ *e* $n(S) = 30$ *então,* $p(E) = \frac{15}{30} = 0{,}5 = 50\%$.

Para número par temos: $n(E) = 15$ *e* $n(S) = 30$ *então,* $p(E) = \frac{15}{30} = 0{,}5 = 50\%$ *Por eventos independentes simultâneos já explicado pelo professor anteriormente temos:* $p(E) = 0{,}5 * 0{,}5 = 0{,}25 = 25\%$.

Ao olhar de muitos pode parecer uma atividade básica sem muitos conceitos definidos, mas vale lembrar que essa aula será uma aula introdutória ao assunto e dentre tantos aspectos positivos citados anteriormente, o jogo é capaz de atrair os alunos os deixando mais concentrados e consequentemente tornar mais fácil a compreensão do conteúdo.

Para avaliar se os objetivos do jogo foram alcançados na turma montamos um pequeno questionário a fim de que o aluno com suas palavras diga o que aprendeu.

Neste questionário iremos identificar conceitos de probabilidade que foram ministrados no decorrer da atividade e cálculos paralelos aos da aula.

O questionário é formulado com quatro perguntas. São elas:

Questão 1: Com suas palavras descreva o que são evento e espaço amostral.

Questão 2: Da mesma maneira descreva o que é experimento aleatório.

Questão 3: Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 20. Determine a probabilidade de que seja retirada ao acaso uma bola contendo um número múltiplo de 4.

Questão 4: Um dado e uma moeda são lançados. Determine a probabilidade de ocorrer cara na moeda e a face 6 no dado.

Em sequência será finalizado o jogo e será fornecido uma lista de exercícios para a resolução em sala e casa. Anexo VIII.

Avaliação:

Alunos serão avaliados pelas resoluções dos exercícios da Lista 7, Anexo VII.

Referências:

ALMEIDA, Paulo Nunes de. Educação lúdica: técnicas e jogos pedagógicos. São Paulo: Moema, 1990 EDITORA LOYOLA

BARROSO, J.M. Conexões com a Matemática. Editora Moderna. Volumes 1 e 2. 1° edição São Paulo, 2010.

BLOG DO BEDUKA. OS 20 MELHORES EXERCÍCIOS DE PROBABILIDADE COM GABARITO. Disponível em https://beduka.com/blog/exercicios/matematica-exercicios/exercicios-de-probabilidade/ Acesso em 17 abr. 2022.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. O jogo e a construção do conhecimento matemático. 1992.

2.5.5 Relatório de Observação 9

Começamos a aula corrigindo os exercícios da aula anterior.

Em seguida, começamos tratando o tema probabilidade a partir de tipos de frases que comumente se ouve no dia-a-dia, com o objetivo de fazer com que os alunos percebessem que já estavam familiarizados não só a escutar sobre probabilidade, mas a pensar probabilisticamente. Neste momento os alunos foram bastante participativos falando de suas próprias experiências e como enxergavam a questão da probabilidade.

Tendo feito isto, falamos brevemente sobre a história acerca de como as primeiras seguradoras usavam a matemática para estimar as probabilidades de ocorrências de roubos ou perca de cargas por naufrágio que vitimavam comerciantes navegadores.

Logo após isso, fizemos umas atividades com os alunos, onde os desafiamos a responder algumas questões relativamente simples envolvendo probabilidades. Isso foi feito com o objetivo de, a partir das próprias conclusões dos alunos, pudéssemos apresentar a equação que define a versão clássica da probabilidade de um evento ocorrer. Esse movimento se mostrou bastante natural com o uso desta metodologia.

Feito isto então, realizamos com os alunos um bingo com cartelas pequenas de apenas 24 números, de modo a fazer com que surgisse um ganhador mais rapidamente. Com esta atividade, a cada rodada (isso nas primeiras rodadas) fizemos uma estimativa com os alunos a respeito de qual era a chance de um deles marcarem um número sorteado. Após algumas rodadas, ficou claro que aqueles que ainda não tinham marcado nada, ou que tinham marcado poucos números, tinham cada vez mais chance de marcar algum número nos próximos sorteios. Isso foi inclusive constatado em sala, quando um ganhador demorou muito para começar a marcar números em sua cartela e, numa sequência de marcações acabou ganhando o bingo.

Após o bingo, realizamos um novo jogo que, desta vez, foi feito em duplas.

O jogo consistiu em colocar dois alunos de frente um pro outro e um tabuleiro no meio representando um rio. Cada aluno recebeu um total de 12 peças de objetos quaisquer. Neste caso utilizamos grãos de milho de pipoca. Neste tabuleiro, além do rio, de cada lado deste rio existem 12 casas. Cada aluno podia colocar quantas dessas peças quisesse em quais dessas casas quisesse. Após isso, um por vez, cada aluno de uma mesma dupla lançava dois dados simultaneamente. A soma dos números que saiam nos dados correspondia à casa da qual o aluno deveria mover uma das peças contidas nesta casa, atravessando o rio e colocando a peça na casa da sua dupla, repetindo-se isso várias vezes até que alguém tivesse atravessado todas as peças.

Ao final desta atividade, os alunos perceberam que se tivessem colocado peças na casa 1, jamais ganhariam o jogo, e puderam notar também quais números eram os que mais saiam nos dados. A partir disso foi realizada uma discussão com os alunos para ver quais motivos eles suspeitavam serem os responsáveis por fazer com que alguns números saíssem tantas em vezes, enquanto que outros saíssem tão poucas vezes. Essa atividade também se mostrou bastante produtiva e motivadora, e os alunos puderam compreender muito bem quais complicações podem surgir em cálculos de probabilidade.

No final da aula, foi passada uma lista com exercícios para os alunos tentarem resolver. Não sobrou tempo para eles realizarem as resoluções em sala.

2.6 TRATAMENTO DE INFORMAÇÃO

2.6.1 Plano de Aula 10

PROMAT – 10º ENCONTRO

16/07/2022

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Trabalhar com tratamento da informação, fazendo uso de gráficos e tabelas, relacionando esses conceitos com o cotidiano dos alunos.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com tratamento da informação, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Coletar dados sobre fatos do cotidiano;
- Realizar procedimentos de organização de dados;
- Expressar e interpretar dados por meio de tabelas e gráficos;
- Fazer previsões a partir das informações dadas.

Conteúdo:

Tratamento da informação.

Recursos Didáticos:

Aula expositiva e dialogada em sistema de streaming utilizando o Google Meet, Software GeoGebra, Microsoft Excel e outros para participação conjunta, em gravação, a ser cedida aos alunos.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos a aula com algumas definições em quadro expositivo afim de aludir quais serão os tópicos a serem tratados, bem como, em mais casos, os exemplos e exercícios pelos quais teremos a intervenção.

Def. **População:** é um conjunto de elementos que têm pelo menos uma característica em comum.

Def. **Amostra:** é um subconjunto finito formado por elementos extraídos de uma população.

Def. **Variável:** é uma característica ou um atributo estudado em todos os elementos da população.

- <u>Variável qualitativa:</u> seus valores são expressos por atributos (por exemplo cor dos olhos, grau de escolaridade, time preferido).
- <u>Variável quantitativa:</u> seus valores são expressos por números (por exemplo altura, massa, idade, número de irmãos), pode ser discreta ou contínua.

i. Variável quantitativa discreta: quando é proveniente de contagem, ou seja, expressa por número inteiro. (Número de irmãos, quantidade de computadores, número de animais).

ii. Variável quantitativa continua: quando é proveniente de medida, ou seja, é expressa por número real. (Massa, idade, altura, temperatura, volume).

Def. **Frequência:** É a quantidade de vezes que cada valor é observado.

Com isto, pretendemos então aplicar uma atividade pela qual conseguiremos alinhar os conceitos dados, em aula expositiva, de forma a resolver os mesmos logo em seguida, orientando os alunos a pausar a exposição da aula e resolver antes de nossa resolução.

Atividade 01 (5 minutos)

Nesta atividade iremos demonstrar a tabela abaixo preenchida com cada um dos aniversários coletados ainda anteriormente, dos alunos, base à mês e dia.

31												
⋮												
3												
2												
1												
	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Mai.	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.

Em seguida, base a tabela, colocaremos as questões logo abaixo na tela orientando a resolução dos alunos, pausando o vídeo.

Questões a serem levantadas:

1- Quantos pessoas assinalaram a tabela?
2- Quantas pessoas fazem aniversário em cada bimestre? Trimestre? E semestre?
3- Quantas pessoas fazem aniversário antes do dia 15? E depois?
4- Construa um gráfico de barras relacionando o número de aniversariantes em cada bimestre?
5- Construa um gráfico de setores relacionando o número de aniversariantes em cada trimestre?

Em seguida, faremos a socialização das resoluções no Excel, elencando estratégias de resolução a serem tomadas.

Após a atividade e sua resolução, traremos novas definições expositivas, com explicações, além de demonstrar exemplos de cada um dos gráficos abaixo.

Def. **Gráfico de Barras:** Apresenta dados categorizados em barras retangulares nos quais os retângulos correspondentes a cada categoria são proporcionais ao número de observações na respectiva categoria. É utilizado para realizar comparações entre as categorias de uma variável qualitativa ou quantitativa discreta. Pode ser utilizado na vertical ou horizontal.

Def. **Gráfico de setores:** Também conhecido como gráfico de pizza ou gráfico circular é um diagrama circular em que os valores de cada categoria estatística representada são proporcionais às respectivas frequências. Pode vir acompanhado de porcentagens, é utilizado principalmente para dados qualitativos normais. Para construir um gráfico tipo pizza é necessário determinar o ângulo dos setores circulares correspondentes à distribuição percentual de cada valor no total.

Def. **Gráfico Pictórico:** Os gráficos chamados pictogramas exibem os dados por meio de símbolos autoexplicativos que, geralmente, estão relacionados com o tema apresentado, que confere eficiência e atratividade ao resultado final.

Def. **Gráficos de linhas:** Conectam pontos de dados individuais em uma exibição. Eles fornecem uma forma simples de visualizar uma sequência de valores, sendo úteis quando se quer ver tendências ao longo do tempo ou para prever valores futuros.

Mostraremos no gráfico de linhas os conceitos de média, mediana e moda, no Excel. Em seguida apresentaremos as definições sobre estes conceitos, explicando-as.

Def. **Média Aritmética:** é o quociente entre a soma dos valores observados e o número de observações.

Def. **Média Aritmética Ponderada:** é a soma dos valores observados multiplicados pela quantidade de vezes que se repete, divido pelo número de observações.

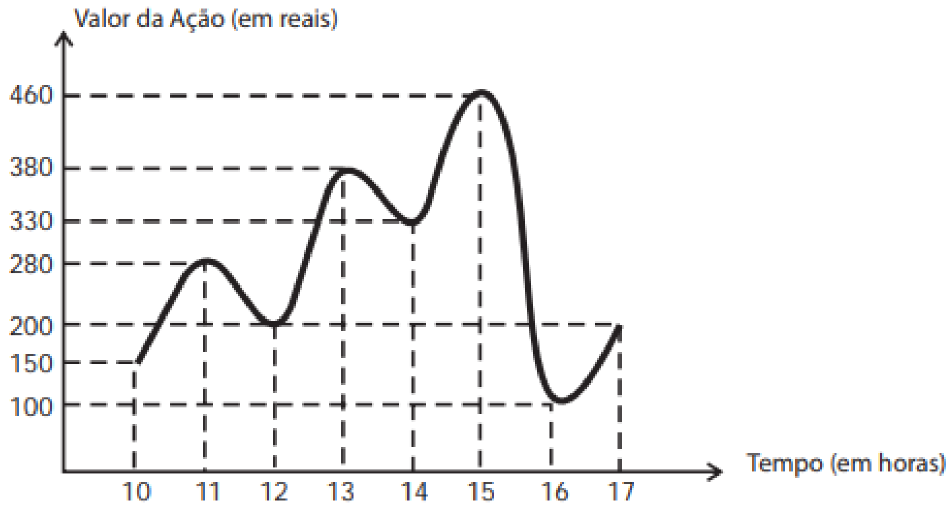
Def. **Mediana:** é o valor que divide um grupo, previamente ordenado de modo crescente ou decrescente, em duas partes com o mesmo número de termos.

Def. **Moda:** são os valores que aparecem com maior frequência no conjunto de valores observados (população ou amostra).

Atividade 02 (10 minutos)

Posteriormente, possibilitaremos alguns exercícios para resolução, quais, novamente orientaremos pausar o vídeo para resolver. Iremos nós resolver pausadamente cada um dos exercícios afim de alinhar os conceitos tratados e as aplicações.

1. (Questão adaptada ENEM 2012) O gráfico fornece os valores das ações da empresa XPN, no período das 10 às 17 horas, num dia em que elas oscilaram acentuadamente em curtos intervalos de tempo.



Neste dia, cinco investidores compraram e venderam o mesmo volume de ações, porém em horários diferentes, de acordo com a seguinte tabela.

Investidor	Hora da Compra	Hora da Venda
1	10:00	15:00
2	10:00	17:00
3	13:00	15:00
4	15:00	16:00
5	16:00	17:00

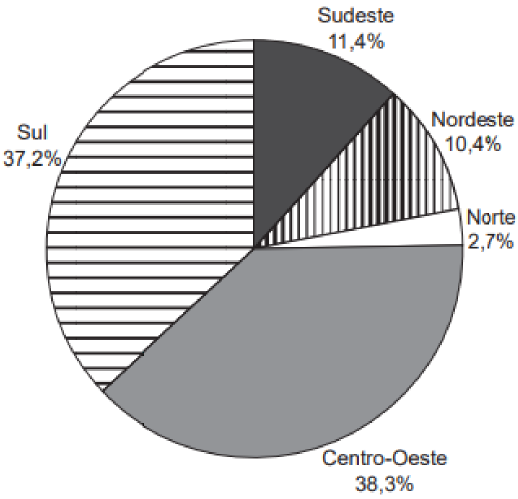
Com relação ao capital adquirido na compra e venda das ações, qual investidor fez o melhor negócio?

Resolução: Faremos uma tabela, contendo a comparação dos dados fornecidos.

Investidor	*Valor da Compra*	*Valor da Venda*	*Lucro obtido*
1	*150,00*	*460,00*	*310,00*
2	*150,00*	*200,00*	*50,00*
3	*380,00*	*460,00*	*80,00*
4	*460,00*	*100,00*	*-360,00*
5	*100,00*	*200,00*	*100,00*

Observando a tabela, percebemos que o investidor que teve maior lucro, fez o melhor negócio, foi o primeiro.

2. (Questão adaptada ENEM 2017) Estimativas do IBGE para a safra nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, apontavam uma participação por região conforme indicado no gráfico.



As estimativas indicavam que as duas regiões maiores produtoras produziriam, juntas, um total de 119,9 milhões de toneladas dessas culturas, em 2012. De acordo com esses dados, qual seria o valor mais próximo da produção, em milhão de tonelada, de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, na Região Sudeste do país?

Resolução: Resolveremos por meio da "regra de três".

$$119{,}9 \text{ ——— } 75{,}5$$

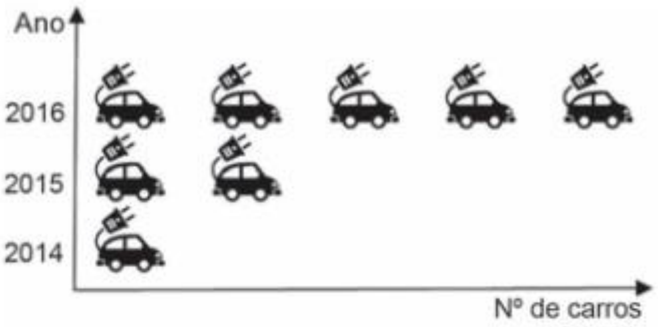
$$x \text{ ——— } 11{,}4$$

$$75{,}5x = 119{,}9 \cdot 11{,}4$$

$$x = \frac{1366{,}86}{75{,}5} = 18{,}1\ milhões$$

3. (Questão adaptada ENEM 2018) De acordo com um relatório recente da Agência Internacional de Energia (AIE), o mercado de veículos elétricos atingiu um novo marco em 2016, quando foram vendidos mais de 750 mil automóveis da categoria. Com isso, o total de carros elétricos vendidos no mundo alcançou a marca de 2 milhões de unidades desde que os primeiros modelos começaram a ser comercializados em 2011.

No Brasil, a expansão das vendas também se verifica. A marca A, por exemplo, expandiu suas vendas no ano de 2016, superando em 360 unidades as vendas de 2015, conforme representado no gráfico.



Disponível em: www.tecmundo.com.br. Acesso em: 5 dez. 2017.

Qual a média anual do número de carros vendidos pela marca A, nos anos representados no gráfico?

Resolução: Sendo cada carrinho uma quantidade x de carros vendidos. Ou seja, em 2016 foram vendidos 5x carros e em 2015, 2x. Segundo o enunciado, temos:

$$5x = 2x + 360$$

$$5x - 2x = 360$$

$$3x = 360 \Rightarrow x = 120$$

Assim, em 2016 foram vendidos 600 carros, em 2015, 240 carros e em 2014, 120 carros. Fazendo a média desses valores, temos:

$$\bar{x} = \frac{600 + 240 + 120}{3} = 320$$

Avaliação:

A avaliação ocorrerá conforme comentário dos alunos no Grupo de WhatsApp com os mesmos, buscando racionalizar o conteúdo proposto.

Referências:

DINÂMICAS PARA GRUPOS. CONHECENDO E APRENDENDO. Disponível em: <https://professoremsala.com.br/5-dinamicas-excelentes-para-o-primeiro-dia-de-aula/>. Acesso em: 28 mai. 2019.

LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões com a Matemática 3**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PROVA DO ENEM 2007. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2007/2007_amarela.pdf>. Acesso em: 31 mai. 2019.

PROVA DO ENEM 2012. Disponível em: <https://www.infoescola.com/wp-content/uploads/2013/06/03_BRANCO.pdf>. Acesso em: 31 mai. 2019.

PROVA DO ENEM 2017. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/cad_5_prova_amarelo_12112017.pdf>. Acesso em: 29 mai. 2019.

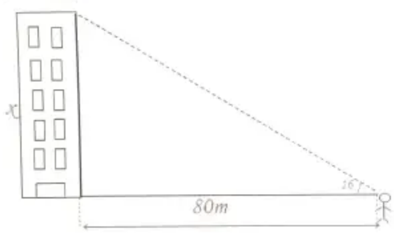
PROVA DO ENEM 2018. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/2DIA_05_AMARELO_BAIXA.pdf>. Acesso em: 29 mai. 2019.

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO. **Quando você faz aniversário?** Disponível em: <http://www.ensinandomatematica.com/tratamento-da-informacao-nos-anos-iniciais/>. Acesso em: 28 mai. 2019.

3.0 LISTA DE EXERCÍCIOS

Lista de Exercício 1 – ANEXO I

1. Uma pessoa está distante 80m (80 m) de um prédio e vê o ponto mais alto do prédio sob um ângulo de 16º em relação à horizontal. Qual é a Altura do prédio? Dado: tg 16º = 0,28.

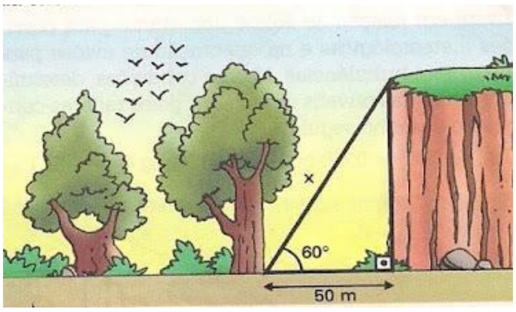


Resolução: Observe que o cateto oposto ao ângulo é a própria altura do prédio e o adjacente e a distância da pessoa até o prédio, então:

Sendo X a altura do prédio = Cateto oposto sobre cateto adjacente

$$Tg\ 16° = \frac{x}{80}$$
$$0{,}28 = \frac{x}{80} = 22{,}4\ m$$

2. O ângulo de elevação do pé de uma árvore, a 50m (deixar espaço entre o número e a unidade de medida) da base de uma encosta, ao topo da encosta é de 60º. Que medida deve ter um cabo que ligue o pé da árvore ao topo da encosta

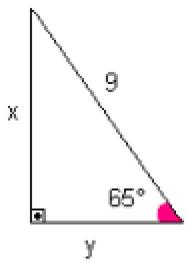


Resolução: Observe na imagem do enunciado que temos um triângulo retângulo, cujo cateto adjacente ao ângulo de 60° mede 50 m e a medida, x, do cabo que devemos calcular é a hipotenusa.

Para solucionar esta questão utilizaremos a identidade trigonométrica do cosseno do ângulo de 60°.

$$Cos\ 60° = \frac{CA}{Hip}$$
$$0{,}5 = \frac{50m}{x} = 100\ m$$

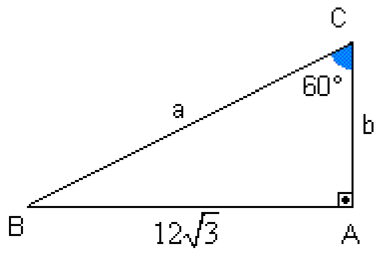
3. No triângulo retângulo da figura abaixo, determine as medidas de x e y indicadas (Use: sen 65° = 0,91; cos 65° = 0,42 ; tg 65° = 2,14)



Resolução:

$$Sen\ 65° = \frac{x}{9} =$$
$$0{,}91 = \frac{x}{9} = 8{,}19$$
$$Cos\ 65° = \frac{y}{9}$$
$$0{,}42 = \frac{y}{9} = 3{,}78$$

4. Considerando o triângulo retângulo ABC da figura, determine as medidas a e b indicadas. (Sen 60° = 0,866)



Resolução:

$$Sen\ 60° = \frac{12\sqrt{3}}{a}$$
$$0{,}866 = \frac{12\sqrt{3}}{a}$$
$$a = 24$$
$$Cos\ 60° = \frac{b}{24}$$
$$0{,}5 = \frac{b}{24}$$
$$b = 12$$

5. Sabe-se que, em um triângulo retângulo isósceles, cada lado congruente mede 30 cm. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

Resolução: Para a execução desse problema, faremos o uso do Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

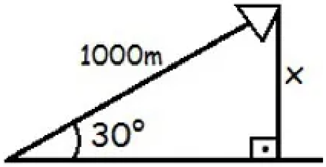
Sendo o valor de cada cateto 30cm:

$$a^2 = 30^2 + 30^2$$
$$a^2 = 1800 = \sqrt{1800}$$
$$a^2 = \sqrt{2.3.3.2.2.5.5} = 30\sqrt{2}$$

O valor da hipotenusa correspondente a esse triângulo retângulo é: $30\sqrt{2}cm.$

6. (UFPI) Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo um ângulo de 30° (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1.000 metros, a altura atingida pelo avião, em metros, é:

Resolução: Interpretando a situação descrita no problema, temos a seguinte imagem que ilustra a situação em que a altura atingida pelo avião é dada por x:



Utilizando a fórmula para o cálculo do seno, temos:

$$Sen\ 30° = \frac{x}{1000}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{x}{1000} = 500\ m$$

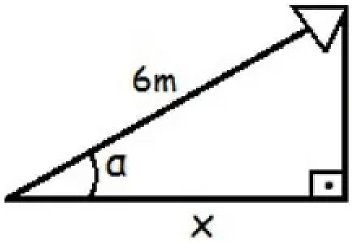
Portanto, o avião atingiu 500 m de altura.

7. (CEFET-MG - adaptado) Uma escada que mede $6m$ está apoiada em uma parede. Sabendo-se que ela forma com o solo um ângulo α e que

$$Cos\ \alpha = \frac{(\sqrt{5})}{3}$$

a distância de seu ponto de apoio no solo até a parede, em metros, é:

Resolução: Podemos ilustrar a situação descrita pelo enunciado do problema com a seguinte figura:



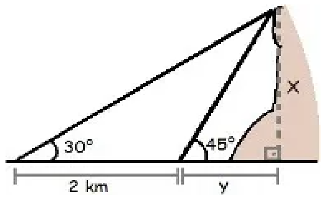
Utilizando a fórmula para o cálculo do cosseno, temos:

$$Cos\ a = \frac{(\sqrt{5})}{3}$$
$$Cos\ a = \frac{x}{6}$$
$$\frac{(\sqrt{5})}{3} = \frac{x}{6}$$
$$3x = 6\sqrt{5}$$
$$x = 2\sqrt{5}$$

8. (U.F. Juiz de Fora – MG) Ao aproximar-se de uma ilha, o capitão de um navio avistou uma montanha e decidiu medir a sua altura. Ele mediu um ângulo de 30° na direção do seu cume. Depois de navegar mais 2 km em direção à montanha, repetiu o procedimento, medindo um novo ângulo de 45°.

Então, usando √3 = 1,73, qual o valor que mais se aproxima da altura dessa montanha, em quilômetros?

Resolução: Primeiramente, vamos visualizar a situação hipotética através do desenho abaixo:



Para resolver esse exercício, é preciso recordar que o cálculo da tangente é dado pelo quociente do cateto oposto pelo cateto adjacente e que, de acordo com a tabela trigonométrica dos ângulos notáveis, a tangente de 45° é 1 e a tangente de 30 é dada por $\frac{(\sqrt{3})}{3}$*. Sendo assim, temos:*

$$Tg\ 45° = \frac{x}{y}$$
$$Tg\ 45°.y = x$$
$$Tg\ 30° = \frac{x}{2+y}$$
$$Tg\ 30°.(2+y) = x$$

Encontramos dois valores distintos para a variável x, igualando-os, temos:

$$Tg\ 45°.y = Tg\ 30°.(2+y)$$
$$1.y = \frac{(\sqrt{3})}{3}.(2+y)$$
$$y = \frac{1{,}73}{3}.(2+y)$$
$$3y = 1{,}73y + 3{,}46$$
$$3y - 1{,}73y = 3{,}46$$
$$1{,}27y = 3{,}46$$
$$y = \frac{3{,}46}{1{,}27} = 2{,}7\ km$$

Mas nós procuramos pelo valor correspondente a x, podemos então substituir o valor encontrado de y em alguma das equações destacadas em azul:

$$x = Tg\ 45°.y$$
$$x = 1.2{,}7$$
$$x = 2{,}7km$$

Portanto, a altura da montanha é de, aproximadamente, 2,7 quilômetros.

9. Determine os ângulos agudos de um triângulo retângulo de catetos que medem √3 cm e 1 cm.

Resolução: Sejam os ângulos procurados a e b, temos então:

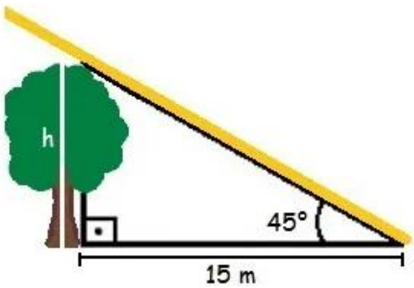
$$Tg\ a = \frac{(\sqrt{3})}{1} = 60°$$

$$Tg\ b = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 30°$$

Os ângulos agudos procurados são 30° e 60°.

10. Quando o Sol se encontra a 45º acima do horizonte, uma árvore projeta sua sombra no chão com o comprimento de 15 m. Determine a altura dessa árvore:

Resolução: Para entender melhor a questão, é adequado tentar visualizar a situação do exercício. No desenho abaixo, o segmento de reta amarelo representa um raio solar que é o responsável por originar a sombra da árvore.



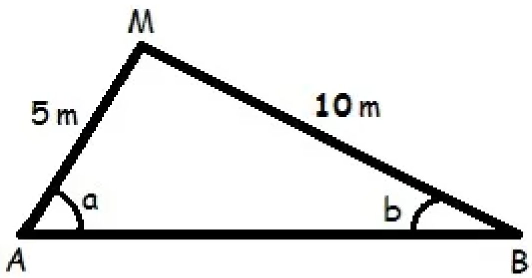
Há um ângulo de 45° com o solo, e o comprimento da sombra é a base do triângulo. Pela tabela trigonométrica dos ângulos notáveis, verificamos que a tangente de 45° é 1.

Utilizando a fórmula da tangente, temos:

$$Tg\ 45° = \frac{h}{15}$$
$$h = 15 . Tg\ 45°$$
$$h = 15 . 1 = 15m$$

Portanto, a altura dessa árvore é de 15 metros.

11. Determine os ângulos a e b, sabendo que a soma deles resulta em 90°.



Resolução: Se a + b = 90° e que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, podemos afirmar que o ângulo formado pelo vértice M é um ângulo reto (90°) e que a hipotenusa desse triângulo é o lado AB. Vamos então utilizar as relações fundamentais do triângulo retângulo.

$$Tg\ a = \frac{CO}{CA}$$
$$Tg\ a = \frac{10}{5} = 2$$
$$Tg\ b = \frac{CO}{CA}$$
$$Tg\ B = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Utilizando a tabela trigonométrica, verificamos facilmente que a = 63° e b = 27°.

Lista de Exercício 2 – ANEXO II

1. Qual é, em radianos, a medida do ângulo descrito pelo ponteiro dos minutos de um relógio, num período de 25 minutos.

   Resolução:

$$\frac{360}{60} \cdot 25 = \frac{9000}{60} = \frac{900}{6} = \frac{5\pi}{6} rad$$

2. Um móvel, partindo do ponto A percorreu um arco de 1690° na circunferência trigonométrica. Quantas voltas completas deu e em qual quadrante parou?

   Resolução: $1690° = 250° + 4 \cdot 360°$

   Assim, o móvel deu 4 voltas completas no sentido anti-horário e como $180° < 250° < 270°$, o móvel parou no terceiro quadrante.

3. Calcule o valor de cada expressão, reduzindo ao 1º quadrante.

   a) sen 150°

$$sen(150°) = sen(\pi - 30°) = sen(30°) = \frac{1}{2}$$

   b) tg 120°

$$tg(120°) = tg(\pi - 60°) = -tg(60°) = -\sqrt{3}$$

   c) cos 225°

$$cos(225°) = cos(\pi + 45°) = -cos(45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

d) sen 315°

$$sen(315°) = sen(2\pi - 45°) = -sen(45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. Determine o valor das seguintes expressões:

a) $y = 5cos\frac{7\pi}{4} + sen\frac{\pi}{4} - 6\,cos\frac{\pi}{4}$

$$y = 5cos(315°) + sen(45°) - 6\,cos(45°)$$
$$y = 5cos(45°) + sen(45°) - 6\,cos(45°)$$
$$y = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

b) $y = sen\,\frac{4\pi}{3} + cos\frac{5\pi}{6} + tg\,\frac{4\pi}{6}$

$$y = sen\,(240°) + cos(150°) + tg(120°)$$
$$y = -sen\,(60°) - cos\,cos\,(30°)\; - tg(60°)$$
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}$$
$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

Lista de Exercício 3 – ANEXO III

1. Em um sistema predador-presa, o número de predadores e de presas tende a variar periodicamente com o tempo. Considere que em determinada região, onde leões são os predadores e zebras são as presas, a população de zebras tenha variado de acordo com a função dada por:

   $Z(t) = 850 + 400 \cdot sen\,\frac{\pi t}{4}$, sendo tempo *t* medido, em anos, a partir de janeiro de 2012 ($t = 0$). Pergunta-se:

a) Quantas zebras havia em janeiro de 2012?

Resolução: $Z(0) = 850 + 400 \cdot sen\,\frac{\pi 0}{4}$

$$Z(0) = 850 + 400 \cdot sen\,0$$
$$Z(0) = 850 + 400 \cdot 0$$
$$Z(0) = 850$$

b) De acordo com a função dada, qual foi a população máxima de zebras atingidas nessa região?

Resolução: A população máxima será atingida quando $sen\ \frac{\pi t}{4}$ for máximo, em uma função trigonométrica o máximo valor obtido é 1, logo:

$$sen\ \frac{\pi t}{4} = 1,\ como,\ sen\ \frac{\pi}{2} = 1$$

$$sen\ \frac{\pi t}{4} = sen\ \frac{\pi}{2},\ portanto,\ t=2$$

Basta agora aplicar $t = 2$ em $Z(t)$,

$$Z(2) = 850 + 400 \cdot sen\ \frac{\pi 2}{4}$$
$$Z(2) = 850 + 400$$
$$Z(2) = 1250$$

c) Determine a primeira vez em que a população de zebras foi máxima.

Resolução:

Foi no ano de 2014, quando $t = 2$.

2. (Ufpb 2011) Com o objetivo de aumentar a produção de alimentos em certa região, uma secretaria de agricultura encomendou a uma equipe de agrônomos um estudo sobre as potencialidades do solo dessa região. Na análise da temperatura do solo, a equipe efetuou medições diárias, durante quatro dias consecutivos, em intervalos de uma hora. As medições tiveram início às 6 horas da manhã do primeiro dia (t = 0). Os estudos indicaram que a temperatura T, medida em graus Celsius, e o tempo t, representando o número de horas decorridas após o início das observações, relacionavam-se através da expressão:

$$T(t) = 26 + 5cos(\frac{\pi}{12}t + \frac{4\pi}{3})$$

Com base nessas informações, identifique as afirmativas corretas:

( ) A temperatura do solo, às 6 horas da manhã do primeiro dia, foi de 23,5 ºC.

( ) A função T(t) atinge valor máximo igual a 30 ºC.

( ) A temperatura do solo atingiu o valor máximo, no primeiro dia, às 14 h.

( ) A função T(t) é crescente no intervalo [0,8].

Resolução: V, F, V, V.

Para verificar o primeiro item basta substituir $t = 0$ na função, assim temos:

$$T(6) = 26 + 5cos(\frac{\pi}{12}0 + \frac{4\pi}{3})$$
$$T(6) = 23{,}5$$

Para o segundo item basta observar que a função cosseno tem valor máximo igual a 1, dessa forma teremos $26 + 5 \cdot 1 = 31$, dessa forma a temperatura máxima é de 31°C. Para o terceiro item basta encontrar o valor de t onde a função cosseno tem valor máximo, sabemos que isso ocorre em múltiplos de 2π, dessa forma fazemos:

$$\frac{\pi t}{12} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi$$
$$t = 8$$

Dessa forma as 14h será o primeiro momento onde a temperatura do solo terá valor máximo. Para o último item basta visualizar que após a oitava hora a função irá decair pois atingiu seu valor máximo com $t = 8$. Após as resoluções, entregaremos outra lista de exercícios para casa, a qual iremos corrigir na próxima aula.

Lista de Exercício 4 – ANEXO IV

1. (Questão adaptada ENEM 2016) Observou-se que todas as formigas de um formigueiro trabalham de maneira ordeira e organizada. Foi feito um experimento com duas formigas e os resultados obtidos foram esboçados em um plano cartesiano no qual os eixos estão graduados em quilômetros. As duas formigas partiram juntas do ponto O, origem do plano cartesiano xOy. Uma delas caminhou horizontalmente para o lado direito, a uma velocidade de 4 km/h. A outra caminhou verticalmente para cima, à velocidade de 3 km/h. Após 2 horas de movimento, quais as coordenadas cartesianas das posições de cada formiga?

   Resolução:

   Como elas andaram duas horas, multiplica sua velocidade por dois, então:

   A primeira:

   $$4 \cdot 2 = 8$$

   e como foi para a direita, é a coordenada x, então fica $(8{,}0)$.

   A segunda:

   $$3 \cdot 2 = 6$$

   e como foi para cima verticalmente, mas a coordenada está em y, então temos $(0{,}6)$.

2. Determine o valor de y de maneira que os pontos $P(1,3)$, $Q(3,4)$ e $R(y,2)$ sejam os vértices de um triângulo qualquer.

Resolução:

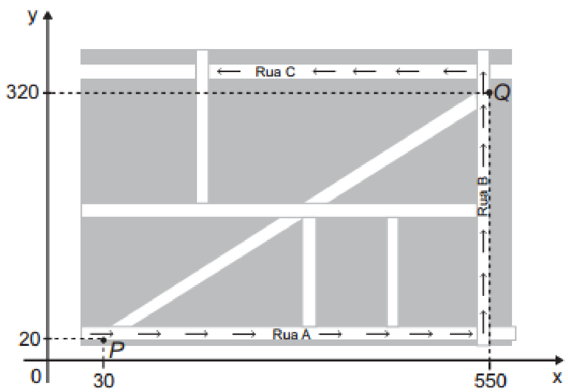
Para que os pontos P, Q e R sejam os vértices de um triângulo qualquer, eles não podem estar alinhados. Dessa forma, o valor do determinante da matriz formada pelas coordenadas dos pontos dados deverá ser diferente de zero.

Dada matriz A: $(1\ 3\ 1\ 3\ 4\ 1\ y\ 2\ 1)$, *formada pelas coordenadas dos pontos, basta calcular o determinante e garantir que ele seja diferente de 0.*

$$(1\cdot 4\cdot 1)+(3\cdot 1\cdot y)+(1\cdot 3\cdot 2)-(y\cdot 4\cdot 1)-(2\cdot 1\cdot 1)-(1\cdot 3\cdot 3)\neq 0$$
$$4+3y+6-4y-2-9\neq 0$$
$$-1-y\neq 0$$
$$y\neq -1$$

Sendo assim, tendo $y\neq -1$, *garantimos que os pontos não são colineares, e consequentemente eles serão vértices de um triângulo.*

3. Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q. Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais. Quais devem ser as coordenadas do novo ponto de parada?

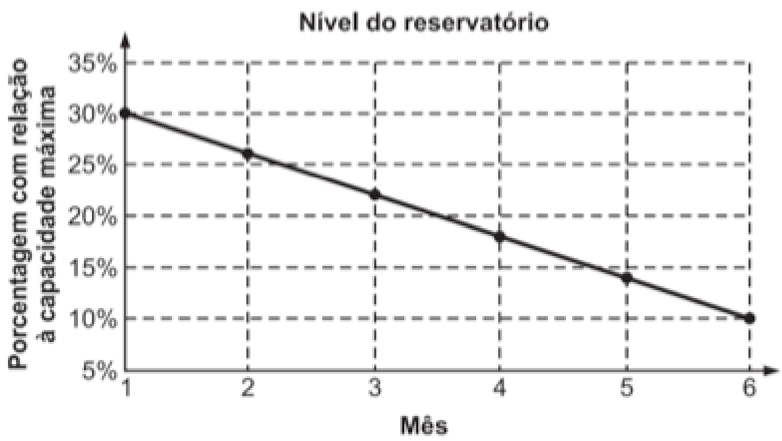


Resolução:

Temos os pontos $P(30,20)$ *e* $Q(550,320)$. *A distância percorrida pelo ônibus foi de:* $(550-30)+(320-20)=820$. *O ponto T deve dividir a trajetória ao meio,* *logo, a distância percorrida P e T deve ser* 410*, assim, as coordenadas desse ponto será de* $T\ (30\ +\ 410, 20)\ =\ T(440, 20)$.

Lista de Exercício 5 – ANEXO V

1. (ENEM (2016) - adaptada) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses. Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?



Resolução: Como conhecemos dois pontos desta reta A = (6,10) e B = (1,30) podemos determinar sua equação $y = ax + b$*:*

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{30 - 10}{1 - 6} = \frac{20}{-5} = -4.$$

Substituindo a e A = (6, 10) na equação $y = ax + b$*, temos:*

$$10 = -4(6) + b \Rightarrow b = 10 + 24 \Rightarrow b = 34.$$

Assim teremos a equação:

$$y = -4x + 34.$$

Para $y = 0$*, temos:*

$$0 = -4x + 34 \Rightarrow 4x = 34 \Rightarrow x = \frac{34}{4} = 8{,}5.$$

Assim, o tempo mínimo depois dos 6 meses para que atinja o nível 0 será:

$$8{,}5 - 6 = 2{,}5\ meses.$$

2. (UFPA) Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $P = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$ e é perpendicular a uma reta que forma com o sentido positivo do eixo do *x* um ângulo cuja tangente é $\frac{5}{2}$.

Resolução: Queremos encontrar uma reta s que passa pelo ponto $P = (\frac{1}{2}, -1)$ *perpendicular a reta r que tem coeficiente angular* $\frac{5}{2}$, *dessa forma devemos ter:*

$$ms \cdot mr = -1$$

$$ms \cdot \frac{5}{2} = -1 \rightarrow ms = \frac{-2}{5}$$

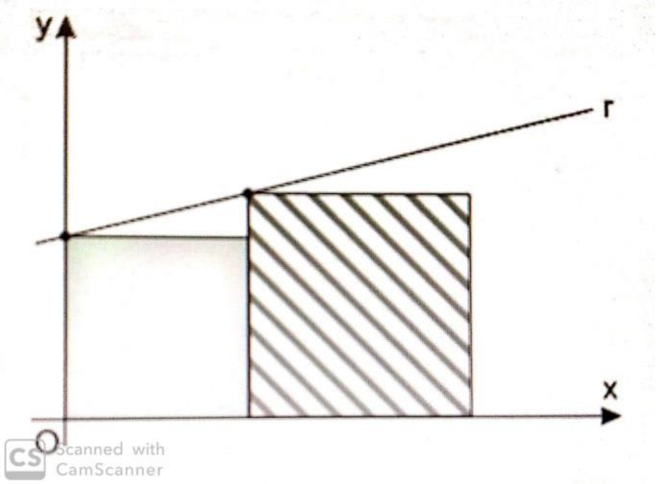
Assim a reta s é dada por:

$$y - y_0 = ms(x - x_0)$$

$$y - 1 = \frac{-2}{5} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y = \frac{-2x}{5} - \frac{4}{5}$$

3. (Ufpr 2012). Na figura abaixo estão representados, em um sistema cartesiano de coordenadas, um quadrado cinza de área 4 unidades, um quadrado hachurado de área 9 unidades e a reta r que passa por um vértice de cada quadrado. Nessas condições, a equação da reta r é?



Resolução:

Sabendo as áreas dos quadrados podemos saber os pontos em que seus vértices se encontram, dessa forma achamos o coeficiente angular da reta r:

$$m_r = \frac{3-2}{2-0} = \frac{1}{2}$$

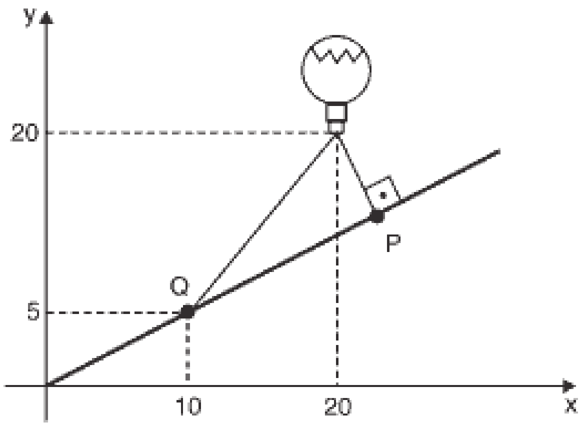
Logo a equação reduzida da reta r é:

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

Que é equivalente a equação:

$$x - 2y = -4$$

4. (UFPR 2011 - Adaptada) Um balão de ar quente foi lançado de uma rampa inclinada. Utilizando o plano cartesiano, a figura abaixo descreve a situação de maneira simplificada.



Ao ser lançado, o balão esticou uma corda presa aos pontos P e Q, mantendo-se fixo no ar. Quais são as coordenadas do ponto P, indicado na figura?

Resolução: Utilizaremos as equações da reta para resolver.

Note que a reta que passa pelos pontos P e Q passa também pela origem, então esta reta tem a forma $y = ax$.

Utilizando o ponto $Q\ (10, 5)$, *encontramos o valor de a:*

$$5 = a \cdot 10$$
$$a = 0{,}5$$
$$y = 0{,}5x$$

Agora, sabemos que o segmento do balão e o ponto P é perpendicular a reta que acabamos de encontrar. Então seu coeficiente angular é o inverso negativo, ou seja, -2. *A reta perpendicular que passa pelo ponto do balão* $(20{,}20)$ *é:*

$$y = ax + b$$

$$20 = -2 \cdot 20 + b$$
$$b = 60$$
$$y = -2x + 60$$

Para encontrar o ponto P, basta achar a interseção entre as duas retas:

$$0{,}5x = -2x + 60$$
$$2{,}5x = 60$$
$$x = 24$$

Se $x = 24, y = 12$. *Então o ponto P é* $(24, 12)$.

Lista de Exercício 6 – Anexo VI

1. Determine, nos casos a seguir, a equação reduzida da circunferência:

a) De centro C(2,5) e raio $r = 3$

Resolução: A equação reduzida da circunferência tem a seguinte forma:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Dessa forma teremos:

$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$$

b) De centro C(-1,-4) e raio $r = \sqrt{7}$

Resolução:

$$(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 7$$

c) De centro (0,0) e raio 1

Resolução:

$$x^2 + y^2 = 1$$

d) De centro C(-3,6) e diâmetro 8

Resolução:

$$(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 16$$

2. (Vunesp-SP). Considere o quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados e circunscrito à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$. Determine as equações das retas que contêm as diagonais desse quadrado.

Resolução:

Equação geral da circunferência

$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$

Completando os quadrados

$x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 12 = 0$

Equação reduzida

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$

Para $x = 3, (y - 2)^2 = 1, y - 2 = 1, y = 3$

Para $x = 3, (y - 2)^2 = 1, y - 2 = -1, y = 1$

Para $y = 2, (x - 3)^2 = 1, x - 3 = 1, x = 4$

Para $y = 2, (x - 3)^2 = 1, x - 3 = -1, x = 2$

Coordenada do quadrado

$A=(2,3)$

$B=(4,3)$

$C=(4,1)$

$D=(2,1)$

Equação reta suporte da diagonal AC

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$det = 3x + 4y + 2 - 12 - x - 2y = 0$$

$$2x + 2y - 10 = 0$$

$$x + y - 5 = 0$$

Equação reta suporte da diagonal BD

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$det = 3x + 2y + 4 - 6 - x - 4y = 0$$

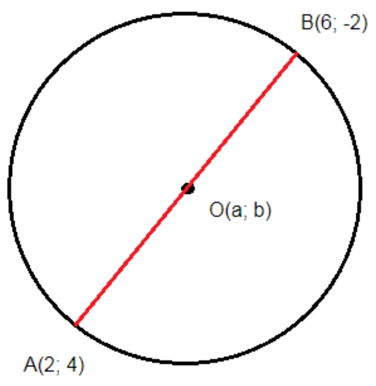
$$2x - 2y - 2 = 0$$

$$x - y - 1 = 0$$

3. Determine a equação da circunferência que tem diâmetro $\overline{AB}$ tal que A(2; 4) e B(6; -2).

Resolução:

Ilustrando a situação, temos:



Sabemos que o centro O é o ponto médio de $\overline{AB}$, então:

$$a = \frac{2+6}{2} = 4 \text{ e } b = \frac{4-2}{2} = 1 \rightarrow O(4;1)$$

$$R = \sqrt{(4-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{13}$$

Assim:

$$(4-2)^2 + (1-4)^2 = \sqrt{13^2}$$

Lista de Exercício 7 – Anexo VII

1. (UFV – 04) Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1 a 100. A probabilidade do bilhete sorteado ser um número maior que 40 ou número par é:

Resolução: A probabilidade de um número sorteado ser maior que 40 ou par é de 80%.

2. Os números naturais de 1 a 10 foram escritos, um a um, sem repetição, em dez bolas de pingue-pongue. Se duas delas forem escolhidas ao acaso, o valor mais provável da soma dos números sorteados é igual a:

Resolução: Temos 10 bolinhas: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Os pares formados podem formar os números:

3: (1,2)

4: (1,3)

5: (2,3), (1,4)

6: (1,5), (2,4)

7: (1,6), (2,5), (3,4)

8: (1,7), (2,6), (3,5)

9: (1,8), (2,7), (3,6), (4,5)

10: (1,9), (2,8), (3,7), (4,6)

11: (1,10), (2,9), (3,8), (4,7), (5,6)

12: (2,10), (3,9), (4,8), (5,7).

Logo, concluímos que temos muito mais chances de encontrar, na soma, o número 11 que os demais.

3. Uma moeda é viciada, de forma que as caras são três vezes mais prováveis de aparecer do que as coroas. Determine a probabilidade de num lançamento sair coroa.

Resolução:1/4

4. Um cartão é retirado aleatoriamente de um conjunto de 50 cartões numerados de 1 a 50. Determine a probabilidade de o cartão retirado ser de um número primo.

Resolução: São 50 cartões numerados de 1 a 5. Pra ser um número primo tem que ser divisível por 1 e por ele mesmo.

Números primos de 1 a 50. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 = 15 números primos. Note que cada um deles, é divisível apenas por 1 e por eles mesmos.

Sabemos a seguinte fórmula da probabilidade: P = CF/CP P = Probabilidade CF = Casos Favoráveis CP = Casos Possíveis

P = 15/50 Simplificando numerador e denominador por 5: P = 3/10 P = 0,3 P = 30%

5. Escolhem-se ao acaso dois números naturais distintos, de 1 a 20. Qual a probabilidade de que o produto dos números escolhidos seja ímpar?

Resolução: Para que o produto seja ímpar é necessário que os dois números envolvidos também sejam ímpares.

Seja A o conjunto dos números de 1 a 20, I o conjunto dos números ímpares e P(I) a probabilidade que o produto seja ímpar. Assim temos:

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

I = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}

P(I) = ?

Ora, na série de 1 a 20 temos que a metade deles são ímpares e a outra metade, pares.

$$C(10,2) = 10 * 9/(1 * 2) = 90/2 = 45$$

E em toda a série dos vinte, temos: $C(20,22) = 20 * 19/(1 * 2) = 380/2 = 190$ *Relacionando as séries de produtos ímpares com todas os produtos possíveis, temos: 9/38*

6. (ENEM 2013) Numa escola com 1.200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras: inglês e espanhol.

Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

(ENEM 2013) 8) Considere o seguinte jogo de apostas:

Numa cartela com 60 números disponíveis, um apostador escolhe de 6 a 10 números. Dentre os números disponíveis, serão sorteados apenas 6. O apostador será premiado caso os 6 números sorteados estejam entre os números escolhidos por ele numa mesma cartela. O quadro apresenta o preço de cada cartela, de acordo com a quantidade de números escolhidos.

Quantidade de números escolhidos em uma cartela	Preço da Cartela
6	2,00
7	12,00
8	40,00
9	125,00
10	250,00

Cinco apostadores, cada um com R$ 500,00 para apostar, fizeram as seguintes opções:

Arthur: 250 cartelas com 6 números escolhidos

Bruno: 41 cartelas com 7 números escolhidos e 4 cartelas com 6 números escolhidos

Caio: 12 cartelas com 8 números escolhidos e 10 cartelas com 6 números escolhidos

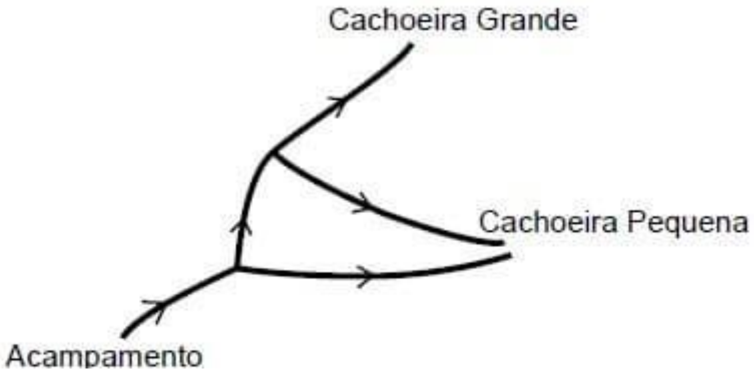
Douglas: 4 cartelas com 9 números escolhidos

Eduardo: 2 cartelas com 10 números escolhidos

Os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são:

Resolução: Os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são Eduardo com 420 possibilidades e Caio com 346 possibilidades.

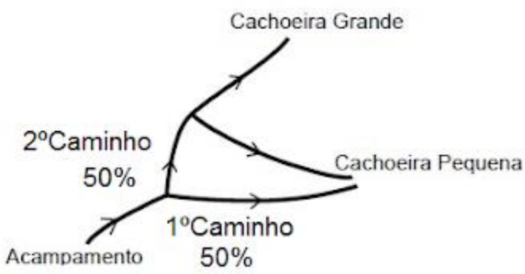
7. (UFMG 2009) Dois jovens partiram, do acampamento em que estavam, em direção à Cachoeira Grande e à Cachoeira Pequena, localizadas na região, seguindo a trilha indicada neste esquema:



Em cada bifurcação encontrada na trilha, eles escolhiam, com igual probabilidade, qualquer um dos caminhos e seguiam adiante. Então, é CORRETO afirmar que a probabilidade de eles chegarem à Cachoeira Pequena é:

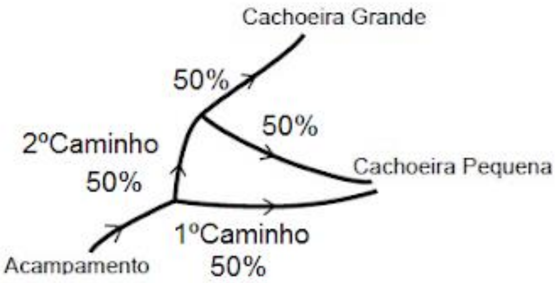
Resolução: Os jovens, ao saírem do acampamento, podem se orientar por dois caminhos diferentes:

Adotando: 1º Caminho e 2º Caminho:



Eles possuem 50% de chances de selecionarem o 1º Caminho e chegarem diretamente à Cachoeira Pequena e 50% de chances de tomarem o 2º Caminho.

Pensando apenas no 2º Caminho. Seguindo por esse, os jovens ainda poderiam alcançar à Cachoeira Pequena, isso pois:



Em um trecho, o 2º caminho se bifurca permitindo 50% de chances de seguir à Cachoeira Pequena e 50% de chances de escolher a trilha que leva à Cachoeira Grande. Logo, nesse caminho tem-se 50% de 50% de chances de se chegar ao destino programado.

Com isso tem-se em Probabilidade para atingir a Cachoeira Pequena:

50% + 50% de 50% de chances, ou seja, a probabilidade é de 3/4 (75%).

8. (UFMG 2009) Considere uma prova de Matemática constituída de quatro questões de múltipla escolha, com quatro alternativas cada uma, das quais apenas uma é correta. Um candidato decide fazer essa prova escolhendo, aleatoriamente, uma alternativa em cada questão. Então, é CORRETO afirmar que a probabilidade de esse candidato acertar, nessa prova, exatamente uma questão é:

Resolução: Seja P probabilidade de se acertar apenas uma das questões marcando aleatóriamente uma das alternativas em cada questão. Perceba que ¼ é a probabilidade de sucesso (acerto) em cada questão ¼ é a probabilidade de fracasso (erro) em cada questão

Há 4 modos de acertar exatamente uma questão: acertar a 1ª e errar as outras; acertar a 2ª e errar as outras ...

*Deste modo temos P=4*1/4*3/4*3/4*3/4*

P=27/64

4.0 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O PROMAT como esperado foi de grande importância no que se diz a experiência em sala de aula, nos proporcionando a oportunidade de ter contato com uma turma no papel de professor, nos permitindo aprendizado e reafirmando a vontade de sermos educadores.

Desde à preparação das aulas, tínhamos em mente a preocupação com a aprendizagem dos alunos, os quais possuíam dificuldades em diversos conteúdos matemáticos e viam a Matemática como algo abstrato e longe de sua realidade.

Para aplicar o conteúdo matemático buscamos exercícios que acreditávamos condizerem com a vivência dos alunos, para que eles percebessem a aplicação da Matemática no cotidiano, além de atividades de investigação Matemática e a realização de intervenções, o que acreditamos tornou os conteúdos menos inóspitos aos alunos do programa, quebrando a barreira presente entre os alunos e o conhecimento matemático.

Houve uma boa participação dos alunos durante a realização das atividades, sendo que esses participavam ativamente das aulas, gerando discussões sobre conteúdos, o que foi bem proveitoso para definir conceitos.

Em diversas oportunidades, havia a exposição das respostas dos alunos em que comentavam sobre sua estratégia de resolução, o que favorecia o andamento da aula, pois, nos munia de diversas resoluções para um mesmo exercício, mostrando que não há só uma forma de resolver um exercício, e que cada aluno pensa de forma diferente, nos levando a estar preparados para diferentes possibilidades em uma sala de aula.

Durante o PROMAT, crescemos amplamente no âmbito pessoal, e claro que para nós o crescimento pessoal foi extremamente importante, pois esse está diretamente ligado com nosso lado educacional. Consideramos que um professor, antes de trabalhar com conteúdos sobre sua disciplina, realiza um trabalho com pessoas, as quais são únicas, cada pessoa tem sua personalidade e modo de agir, precisa ser respeitada e valorizada integralmente.

Acreditamos que cumprimos com objetivo proposto para o PROMAT. Por meio dos depoimentos e observações, pudemos perceber que os alunos compreenderam os conteúdos abordados nos nove encontros.

Ao longo do Projeto desenvolvemos paulatinamente a capacidade de perceber as dificuldades dos alunos, mesmo que eles não nos questionassem sobre o conteúdo, agíamos de forma a esclarecer incompreensões e sanar as dúvidas.

Durante todos os encontros, até mesmo antes e depois, compartilhamos ideias, princípios e conversas em um grupo específico de uma rede social de bate papo. Habitualmente, aos sábados, abríamos a sala e organizávamos os equipamentos tecnológicos. Quando os alunos entravam, a disposição favorecia o agrupamento.

Por fim, podemos enaltecer a importância do PROMAT para nossa formação e crescimento profissional, o qual nos forneceu experiências distintas das até então experimentadas em nossa curta atuação como docentes, como o uso de jogos e atividades lúdicas. Isso impactou positivamente em nossa atuação como educadores da disciplina de Matemática.